



Уральский  
федеральный  
университет

имени первого Президента  
России Б.Н.Ельцина

Институт естественных наук  
и математики

# МЕХАНИКА

Практикум





МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
УРАЛЬСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ ПЕРВОГО ПРЕЗИДЕНТА РОССИИ Б. Н. ЕЛЬЦИНА

# МЕХАНИКА

## Практикум

Рекомендовано  
методическим советом Уральского федерального университета  
для студентов вуза, обучающихся по направлениям подготовки  
03.03.02 «Физика», 21.03.03 «Геодезия и дистанционное зондирование»,  
27.03.01 «Стандартизация и метрология», 27.03.05 «Инноватика»,  
28.03.01 «Нанотехнологии и микросистемная техника»,  
05.03.04 «Гидрометеорология» и по специальности  
03.05.01 «Астрономия»

Екатеринбург  
Издательство Уральского университета  
2019

УДК 531(07)

М550

Авторы:

Н. А. Скулкина, С. Г. Колчанова, В. А. Шихова,  
Е. А. Вилисова, В. Г. Черняк, С. И. Студенок, А. В. Германенко

Под общей редакцией В. А. Шиховой

Рецензенты:

кафедра физики и математического моделирования  
Уральского государственного педагогического университета  
(заведующий кафедрой доктор физико-математических наук,  
профессор В. Е. Сидоров);

Г. Ш. Болтачев, доктор физико-математических наук,  
заместитель директора по научной работе  
Института электрофизики УрО РАН

**Механика** : практикум / [Н. А. Скулкина, С. Г. Колчанова,  
М550 В. А. Шихова, Е. А. Вилисова, В. Г. Черняк, С. И. Студенок, А. В. Германенко ; под общ. ред. В. А. Шиховой] ; М-во науки и высш. образования Рос. Федерации, Урал. федер. ун-т. — Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2019. — 274 с.

ISBN 978-5-7996-2620-4

Материал практикума структурирован в соответствии с разделами курса общей физики «Механика». Приведены детальное описание теории изучаемого явления, порядок выполнения научного эксперимента, богатый иллюстративный материал.

Практикум может быть полезен при выполнении лабораторных работ, а также при самостоятельном освоении теоретических основ физических явлений студентами младших курсов.

УДК 531(07)

На обложке:

Экспериментальная установка для изучения движения гироскопа  
Фото К. Н. Иванова

ISBN 978-5-7996-2620-4

© Уральский федеральный университет, 2019



# ОГЛАВЛЕНИЕ

ОТ АВТОРОВ.....	7
<b>1. ФИЗИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ И СПОСОБЫ ИХ ИЗМЕРЕНИЯ.....</b>	<b>10</b>
1.1. Измерение массы.....	10
1.1.1. Аналитические демпферные весы АДВ-200.....	10
1.1.2. Лабораторные весы.....	14
1.2. Измерение линейных размеров.....	16
1.2.1. Штангенциркуль.....	16
1.2.2. Микрометр.....	19
1.2.3. Линейка.....	22
1.3. Измерение плотности твердого тела.....	23
Лабораторная работа 1. Определение плотности вещества тел правильной геометрической формы.....	24
Лабораторная работа 2. Измерение плотности твердых тел пикнометрическим методом.....	33
<b>2. УСКОРЕНИЕ СВОБОДНОГО ПАДЕНИЯ.....</b>	<b>39</b>
2.1. Силы в природе.....	39
2.2. Закон всемирного тяготения.....	41

2.3. Определение ускорения свободного падения	
с помощью машины Атвуда.....	52
2.3.1. Экспериментальная установка для измерения	
ускорения свободного падения с помощью машины Атвуда.....	53
2.3.2. Экспериментальная установка для изучения	
равноускоренного движения с помощью машины Атвуда.....	55
<i>Лабораторная работа 3. Определение величины земного</i>	
<i>ускорения при помощи машины Атвуда.....</i>	<i>57</i>
<i>Лабораторная работа 4. Исследование кинематики</i>	
<i>равноускоренного движения.....</i>	<i>62</i>
<i>Лабораторная работа 5. Исследование динамики</i>	
<i>равноускоренного движения.....</i>	<i>67</i>
2.4. Определение ускорения свободного падения	
с помощью математического маятника	
и физического (оборотного) маятника.....	72
2.4.1. Математический маятник.....	73
2.4.2. Физический (оборотный) маятник.....	75
<i>Лабораторная работа 6. Измерение ускорения</i>	
<i>свободного падения с помощью математического маятника.....</i>	<i>77</i>
<i>Лабораторная работа 7. Определение ускорения свободного</i>	
<i>падения с помощью математического и физического маятников.....</i>	<i>81</i>
<i>Лабораторная работа 8. Определение гравитационной</i>	
<i>постоянной с помощью гравитационного</i>	
<i>торсионного балансира (весов) Кавендиша.....</i>	<i>87</i>

### **3. ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДЫХ ТЕЛ.**

<b>МОМЕНТ ИНЕРЦИИ.....</b>	<b>99</b>
3.1. Способы описания вращательного движения.....	99
3.2. Момент инерции.....	103
3.3. Теорема Штейнера. Тензор инерции.....	107
<i>Лабораторная работа 9. Измерение моментов инерции тел.....</i>	<i>115</i>
<i>Лабораторная работа 10. Измерение моментов инерции</i>	
<i>параллелепипеда.....</i>	<i>126</i>

<i>Лабораторная работа 11. Измерение угловой скорости</i> .....	139
<i>Лабораторная работа 12. Измерение параметров вращательного движения (маятник Обербека)</i> .....	150
<i>Лабораторная работа 13. Изучение движения маятника Максвелла</i> .....	165
<b>4. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В МЕХАНИКЕ</b> .....	173
4.1. Энергия и законы сохранения.....	173
4.2. Механический удар.....	177
4.2.1. Определение скоростей шаров после удара.....	178
4.2.2. Определение работы деформации при ударе шаров.....	181
4.2.3. Определение коэффициента восстановления скорости тел при ударе.....	182
4.2.4. Определение силы взаимодействия тел.....	183
4.2.5. Определение времени соударения.....	184
<i>Лабораторная работа 14. Изучение взаимодействия тел при ударе</i> .....	188
<i>Лабораторная работа 15. Измерение времени соударения упругих шаров</i> .....	195
4.3. Полет тела. Баллистический маятник.....	202
<i>Лабораторная работа 16. Определение скорости полета тела с помощью баллистического крутильного маятника</i> .....	206
4.4. Гироскоп.....	209
<i>Лабораторная работа 17. Измерение моментов инерции и частоты нутации гироскопа</i> .....	212
<i>Лабораторная работа 18. Измерение скорости прецессии гироскопа</i> .....	225
<b>5. СИЛА ТРЕНИЯ. НАКЛОННЫЙ МАЯТНИК</b> .....	233
5.1. Коэффициент трения скольжения. Наклонный маятник.....	234
5.2. Коэффициент трения качения.....	237
<i>Лабораторная работа 19. Определение коэффициентов трения с помощью наклонного маятника</i> .....	239

<b>6. ИЗУЧЕНИЕ СВОБОДНЫХ</b>	
<b>И ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ</b> .....	243
6.1. Гармонический осциллятор.....	243
6.2. Свободные колебания консервативного гармонического осциллятора.....	244
6.3. Свободные колебания гармонического осциллятора с затуханием.....	246
6.4. Вынужденные колебания гармонического осциллятора и явление резонанса.....	248
6.5. Торсионный маятник.....	251
6.6. Добротность, время релаксации, декремент затухания.....	253
<i>Лабораторная работа 20. Изучение свободных и вынужденных         колебаний торсионного маятника</i> .....	256
<i>Лабораторная работа 21. Изучение явления резонанса         торсионного маятника</i> .....	262
 <i>Приложение</i>	
<b>ПРИМЕР ОФОРМЛЕНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ</b>	
<b>И ИХ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ</b> .....	267
 <b>СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ</b> .....	271

## ОТ АВТОРОВ

То, что мы называем физикой, охватывает группу естественных наук, основывающих свои понятия на измерениях.

*А. Эйнштейн*

Корректное измерение физических величин во время наблюдений и опытов составляет основную часть любого научного исследования в физике, поскольку лежит в основе определения различных физических характеристик и установления количественного соответствия между ними. Полнота работ, представленных в лабораторном комплексе, коррелирует с полнотой знаний, полученных студентами, и степенью понимания курса физики. Поэтому формирование учебного лабораторного комплекса является весьма актуальной задачей.

Лабораторный комплекс общего физического практикума включает в себя возможность наблюдения почти всего спектра характерных явлений и процессов, изучаемых в соответствующих разделах курса общей физики.

Лаборатория измерений физических величин является вводной в физический практикум. Ее задачами являются:

- формирование навыков измерения физических величин и правильного представления результатов измерения;
- овладение практическими навыками проведения исследований, методами обработки и анализа результатов измерений;
- опытное обоснование изучаемых физических явлений.

Студентам предлагается выполнение работ по определению плотности тел различной геометрической формы, измерению ускорения свободного падения, моментов инерции тел с помощью различных методов, изучению кинематических и динамических характеристик поступательного и вращательного движения. Вариативность выполнения работ на одной экспериментальной установке позволяет осуществлять дифференцированный подход к обучению студентов.

Практикум содержит описания лабораторных работ для студентов университета, специализирующихся в области физики, а также для студентов, обучающихся по инженерно-техническим направлениям.

Практикум состоит из шести глав, которые соответствуют различным темам раздела курса общей физики «Механика». В главах имеется теоретическая часть, общая для лабораторных работ данной главы. В приложении приводится пример обработки результатов измерения.

Практикум переработан с целью усовершенствования имеющихся лабораторных работ и дополнен новыми работами, выполнение которых предполагает использование современного оборудования.

В составлении описаний лабораторных работ участвовали преподаватели департамента фундаментальной и прикладной физики и кафедры конденсированного состояния и наноразмерных систем УрФУ им. Б. Н. Ельцина: профессора, доктора физико-математических наук Н. А. Скулкина, В. Г. Черняк и А. В. Германенко; доценты, кандидаты физико-математических наук С. Г. Колчанова, С. И. Студенок, В. А. Шихова и Е. А. Вилисова.

В организации и постановке лабораторных работ в разное время принимали участие преподаватели Уральского государственного университета им. А. М. Горького: В. П. Ворошилов, С. Д. Вангенгейм, С. Н. Иванченко, Л. Я. Кобелев, А. К. Кикоин, Г. Н. Колесников, Ф. Д. Ковалев, А. Н. Кулев, И. А. Кузнецов, Н. Б. Лобанова, Ю. А. Ло-

банов, Н. С. Малев, В. Х. Осадченко, В. В. Парфенов, А. С. Распопин, Е. Ф. Шабалина, Г. П. Яковлев.

Авторы выражают благодарность К. Н. Иванову за постановку лабораторных работ и А. В. Тебенькову за полезные обсуждения и помощь в разработке описаний.

# 1. ФИЗИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ И СПОСОБЫ ИХ ИЗМЕРЕНИЯ

## 1.1. Измерение массы

### 1.1.1. Аналитические демпферные весы АДВ-200

Измерение массы выполняется путем взвешивания на аналитических весах. Аналитические весы отличаются высокой чувствительностью, которая достигается тщательным изготовлением деталей, использованием высококачественных материалов и некоторых вспомогательных устройств. Подобно другим лабораторным весам *аналитические весы* — это равноплечные весы с коромыслом.

В лаборатории измерений используются весы типа АДВ-200, т. е. аналитические демпферные весы с предельной нагрузкой 200 г (рис. 1.1). Слово «демпферные» означает, что весы снабжены устройством (демпфером), обеспечивающим быстрое затухание колебаний коромысла.

Весы заключены в стеклянный футляр с поднимающейся передней дверцей. На основании весов установлена колонка. На ней помещается подушка для средней призмы коромысла. В середине коромысла укреплена агатовая призма, которая своим ребром опирается на агатовую подушку. На концах коромысла расположены



еще две призмы, на которые с помощью сережек подвешены стаканы демпферов и грузоприемные чашки. К середине коромысла прикреплена вертикальная стрелка. Для предохранения ребер агатовых призм от быстрого изнашивания весы снабжены устройством, позволяющим приподнимать вверх коромысло с чашками и выводить их из соприкосновения с подушками, на которые опираются призмы. Такое устройство называется арретиром. Когда весами не пользуются и во время взвешивания они обязательно должны быть *арретированы*. Арретирующее устройство приводится в действие маховичком. Весы снабжены световым экраном, на который проектируется микрошкала, укрепленная на нижнем конце стрелки. Свет, освещающий шкалу, включается при реарретировании весов маховичком.

Лимбы (внутренний и внешний) управляют встроенными накладными гирями, навешиваемыми на планку на правой стороне весов.

Взвешиваемые образцы всегда располагают на левой чашке. Гири массой 1 г и выше помещают на правую чашку через правую боковую дверцу. Гири малой массы (от 0,01 до 0,99 г) накладывают

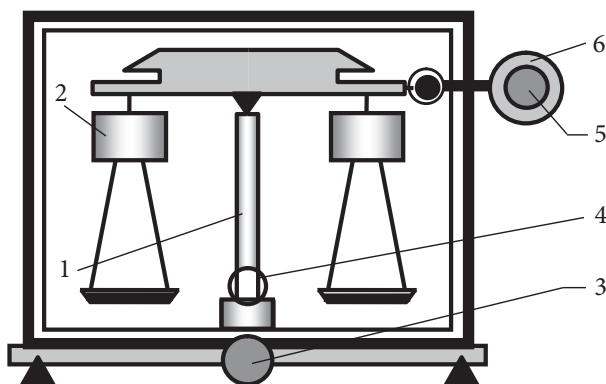


Рис. 1.1. Схема аналитических демпферных весов:

1 — колонка; 2 — стаканы демпферов; 3 — маховичок;  
4 — световой экран; 5 — внутренний лимб; 6 — внешний лимб

с помощью поворота двух дисков 5 и 6 на общей оси. Поворот по часовой стрелке приводит к наложению гирь, против часовой — к их снятию. Диски вращаются независимо друг от друга. Поворачивая малый диск 5, можно изменять массу гирь от 0,01 до 0,09 г. Поворот большого диска обеспечивает изменение массы от 0,1 до 0,9 г. Суммарный вес наложенных кольцевых гирь отсчитывается по цифрам против риски.

Для еще более точного взвешивания необходимо использовать световую шкалу 4, которую следует предварительно проградуировать. Вначале определяют нулевую точку, т. е. то деление шкалы, против которого останавливается стрелка ненагруженных весов. Чтобы ее найти, надо поворотом маховичка реарретировать весы и, дождавшись их успокоения, отсчитать деление шкалы  $n_0$ , на котором остановился световой зайчик. Если  $n_0$  отличается от нулевого деления шкалы на 2–5 делений, то их можно совместить ручкой, находящейся справа, сверху от маховичка.

Далее на правую чашку накладывается гирька массой 10 мг (это можно сделать, поворачивая диск 5), весы разарретируются, и после их успокоения по шкале отсчитывается положение равновесия  $n$ . Теперь можно определить чувствительность весов  $\omega$  и цену деления  $\alpha$ :

$$\omega = \frac{|n - n_0|}{10} \text{ (дел/мг)}, \quad \alpha = \frac{1}{\omega} = \frac{10}{|n - n_0|} \text{ (мг/дел)}.$$

Взвешивание производится следующим образом. Груз неизвестной массы  $M$  размещают в середине левой чашки, а на правую, по возможности ближе к центру, помещают гири. Пока весы малоуравновешены, не следует освобождать коромысло полностью, его освобождают лишь настолько, чтобы можно было судить, которая из чашек легче. После этого весы сразу же арретируют и в зависимости от того, куда отклоняется стрелка, прибавляют или убавляют разновески. Таким образом, можно определить массу груза  $M$  с точностью до массы минимального используемого кольцевого разновеса  $m$ , т. е. определить, что  $M$  лежит в диапазоне  $A < M < A + m$ ,

где  $A$  — масса гирь на правой чашке. Наложение кольцевых разновесов осуществляется при помощи лимбов 5 и 6. При этом следует добиться, чтобы зайчик осветителя установился в пределах световой шкалы как можно ближе к нулевой точке.

Масса груза подсчитывается так. Пусть масса разновеса на правой чашке равна  $A$ , цифра против риски на внешнем диске равна  $B$ , а на внутреннем  $C$ . При этом зайчик осветителя установился на делении шкалы со значением  $D$ . Тогда очевидно, что

$$M = A + 0,1B + 0,001C + \alpha D.$$

Полученный результат отягощен систематическими погрешностями, имеющими разное происхождение. За систематическую погрешность, обусловленную весами, можно принять цену деления шкалы, т. е.  $\Delta_c M = \alpha$ . Однако результат также отягощен погрешностью, связанной с погрешностью разновесов. Для оценки погрешности  $M$ , связанной с погрешностью разновесов, применяют более сложную процедуру.

Погрешность суммарной массы гирь, уравнивающих образец, включает в себя погрешность отдельных разновесов, которая, в свою очередь, имеет систематический характер. Допустимые пределы этих погрешностей хотя и задаются (для новых разновесов), но точные значения абсолютных погрешностей, лежащих внутри этих пределов, неизвестны. Эти погрешности могут иметь любой знак, так что при взвешивании с использованием нескольких разновесов эти погрешности должны суммироваться алгебраически. Общая абсолютная погрешность может оказаться как больше, так и меньше погрешности отдельного разновеса. Отклонение суммарной номинальной массы гирь от истинного значения их массы неопределенно. Значит, если провести взвешивание другим набором разновесов, то полученное значение массы образца может оказаться другим.

Таким образом, взвешивание с использованием различных наборов разновесов создает условие случайности в процессе проведения

эксперимента. Значит, появляется возможность применения способов обработки случайных измерений к полученному набору данных. Другими словами, погрешность  $M$ , связанную с систематическими погрешностями разновесов, можно определить по формулам расчета случайных погрешностей. Такая процедура искусственного создания случайных условий называется рандомизацией.

### 1.1.2. Лабораторные весы

Весы предназначены для взвешивания тел массой до 311 г с точностью 0,01 г. Весы, изображенные на рис. 1.2, могут быть использованы для взвешивания в гидростатических и осмотических экспериментах.

Перед началом измерений массы тела с помощью лабораторных весов необходимо уравновесить весы. Для этого все веса  $b$  (рис. 1.3) необходимо поставить в положение «0». Поворачивая регулировочный винт, нужно добиться установления равновесия, при этом индикатор уровня должен оказаться на нулевой отметке. Весы готовы к проведению измерений.



Рис. 1.2. Лабораторные весы

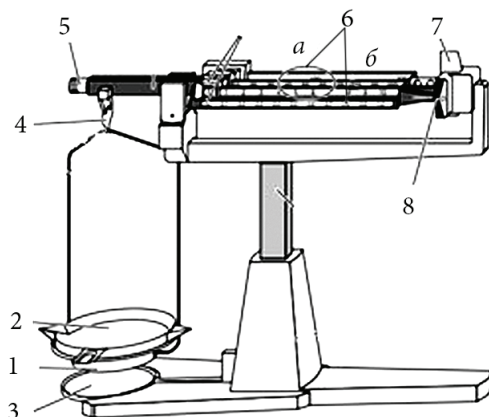


Рис. 1.3. Лабораторные весы:

- 1 — держатель чашки; 2 — чашка, в которую помещается взвешиваемый образец; 3 — гидростатическая пластина; 4 — крюк для держателя чашки; 5 — регулировочный винт для уравнивания весов; 6 — четыре скользящих веса на рельсах: *a* — от 0 до 200 г с шагом, равным 100 г; от 0 до 100 г с шагом, равным 10 г; от 0 до 10 г с шагом, равным 1 г; *б* — с 0,01-граммовой отметкой, измеряет от 0 до 1 г; 7 — демпферная система; 8 — индикатор уровня весов

Для взвешивания нужно поместить образец на чашку весов и с помощью перемещения скользящих весов *б* (*a*, *б*), начиная с самых больших весов, добиться установления индикатора уровня на нулевой отметке. Общая масса образца — сумма отдельных весов.

Для выполнения гидростатических измерений сначала поднимают гидростатическую пластину до желаемой высоты, отодвинув держатель чашки в сторону. На платформе помещается резервуар с соответствующей жидкостью. Для выполнения измерений образец подвешивается на крюк, после чего восстанавливается баланс путем перемещения скользящих весов.

## 1.2. Измерение линейных размеров

Измерение линейных размеров тел проводится при помощи таких инструментов, как линейка, штангенциркуль и микрометр.

### 1.2.1. Штангенциркуль

*Штангенциркуль* — это миллиметровая линейка, с которой скреплено дополнительное устройство — нониус (названо по имени создавшего его португальского математика П. Нуниша).

Штангенциркуль (рис. 1.4) состоит из стальной линейки с неподвижными измерительными губками и подвижных измерительных губок. Измеряемый объект зажимается между неподвижными и подвижными губками. Губки 2 сделаны зацело с подвижной рамкой 3, которая может стопориться винтом 4. Рамка 3 при помощи винта и гайки микрометрической подачи соединена с рамкой 5, имеющей стопорный винт 6. На нижнем краю рамки 3 нанесены деления нониуса (10 или 20).

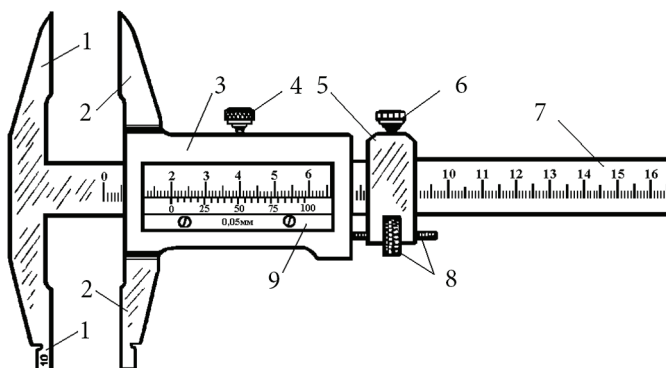


Рис. 1.4. Штангенциркуль:

1 — неподвижные измерительные губки; 2 — подвижные измерительные губки; 3 — подвижная рамка; 4 — стопорный винт; 5 — рамка; 6 — стопорный винт; 7 — стальная линейка; 8 — гайка микрометрической подачи; 9 — нониус

Когда губки 1 и 2 соприкасаются, нулевые деления линейки и нониуса совпадают. Чтобы измерить длину предмета, его помещают между губками 1 и 2 и сдвигают их до соприкосновения с предметом (но без сильного нажима). Стопорный винт 4 позволяет зафиксировать расстояние между губками 1 и 2, т.е. измеряемую длину. Затем по линейке и нониусу отсчитывают длину, как описано ниже.

Нониус представляет собой короткую линейку с нанесенными на ней делениями, скользящую вдоль шкалы основной линейки (рис. 1.5). Но длина делений нониуса  $l_1$  не равна длине делений на линейке  $l_2$  ( $l_2 = 1$  мм). Число же  $n$  делений на нониусе бывает либо 10, либо 20. Обычно соотношение между  $l_1$  и  $l_2$  имеет вид

$$n \cdot l_1 = (2n - 1) \cdot l_2. \quad (1.1)$$

Если  $n = 10$ , то длина десяти делений нониуса (вся его шкала) равна длине 19 делений шкалы линейки (этот случай проиллюстрирован на рис. 1.5). Если  $n = 20$ , то длина шкалы нониуса равна длине 39 делений шкалы линейки.

Иногда используются нониусы, у которых соотношение длин иное:

$$n \cdot l_1 = (n - 1) \cdot l_2. \quad (1.2)$$

В таких нониусах, как видно из выражения (1.2), длина деления нониуса меньше длины деления шкалы линейки. В дальнейшем речь

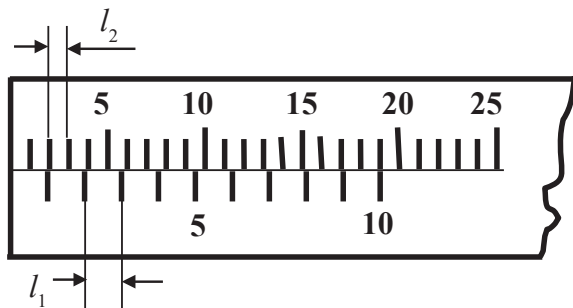


Рис. 1.5. Элемент шкалы штангенциркуля

пойдет о нониусах, описываемых формулой (1.1), поскольку они встречаются чаще. Из этой формулы следует, что длина деления нониуса выражается формулой

$$l_1 = 2l_2 - \frac{l_2}{n}. \quad (1.3)$$

Величина  $l_2/n$  называется *точностью нониуса* и обозначается буквой  $\delta$ . Название это означает, что с помощью нониуса можно измерять длину с точностью, составляющей  $1/n$  от цены деления шкалы линейки. Если число делений на нониусе равно 10, то точность нониуса равна 0,1 мм. Если  $n = 20$ , то она равна 0,05 мм. Значение точности нониуса обычно указано на приборе, снабженном нониусом. Из (1.3) видно, что

$$\delta = \frac{l_2}{n} = 2l_2 - l_1. \quad (1.4)$$

При измерении длины какого-либо тела штангенциркулем тело помещают так, чтобы один его конец  $A$  (рис. 1.6) совпал с нулевой отметкой линейки штангенциркуля. К другому концу  $B$  подводят нулевое деление шкалы нониуса. Так как длина делений нониуса и линейки неодинакова, то при любом положении нониуса относительно шкалы линейки одно из делений нониуса непременно

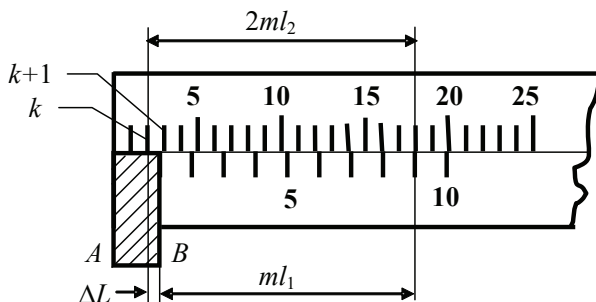


Рис. 1.6. Пример измерения длины тела  $AB$  с помощью штангенциркуля



совпадет с каким-либо делением линейки. На этом и основан отсчет длин по линейке с нониусом.

В самом деле, пусть конец тела  $B$  оказался между  $k$ -м и  $(k + 1)$ -м делениями шкалы линейки. Длина тела  $AB$ , следовательно, равна  $k + \Delta L$ , где  $k$  — целое число миллиметров;  $\Delta L$  — неизвестная доля  $(k + 1)$  миллиметра. Допустим, что с каким-то делением линейки совпало  $m$ -е деление нониуса. Из формулы (1.3) видно, что одно деление нониуса расходится с двумя делениями линейки на величину, равную точности нониуса  $\delta$ . Значит,  $m$  делений нониуса разойдутся с  $2ml_2$  делениями шкалы на величину, равную  $m$  значениям точности нониуса. Но это расхождение и есть искомая величина  $\Delta L$ . Это видно из рис. 1.6.

Итак,  $\Delta L = 2ml_2 - ml_1 = m(2l_2 - l_1) = m\delta$ . Значит, длина тела  $AB$  равна

$$L = (kl_2 + m\delta). \quad (1.5)$$

Таким образом, отсчет длины тела выполняется следующим образом:

1. По шкале линейки отсчитывается целое число миллиметров от нуля линейки до нуля нониуса.
2. Затем находят то деление шкалы нониуса, которое совпадает с каким-либо делением линейки, и умножают номер этого деления на точность нониуса.

Это дает число десятых и сотых долей миллиметра. Формула (1.5) верна и в том случае, когда нониус устроен согласно формуле (1.2), т. е. когда длина деления нониуса меньше, чем у линейки. Примеры отсчета по нониусу, для которого  $l_2 = 1$  мм и  $\delta = 0,1$  мм, приведены на рис. 1.7.

### 1.2.2. Микрометр

Для измерения длины с еще большей точностью, до 0,01 мм, используется микрометр (рис. 1.8). Главная его часть — микрометрический винт с шагом, равным 0,5 мм, который проходит через

стебель. Другой конец винта скреплен внутри с полым цилиндром — барабаном, который скреплен, в свою очередь, с трещоткой. Вращением барабана винт перемещается, ввинчиваясь во внутреннюю резьбу стебля, закрепленного в скобе. На другой стороне скобы имеется упор. Винт и упор образуют своего рода тиски, в которые и зажимается измеряемое тело.

На рис. 1.9 стебель и барабан показаны более детально. На скошенном срезе барабана по его окружности нанесена круговая шкала, имеющая 50 делений. При вращении барабана в резьбовой втулке микровинт скользит вдоль неподвижного стебля 4, на котором нанесена горизонтальная ось. Ниже этой оси — миллиметровые деления, а выше нее — точно такие же деления, но сдвинутые относительно нижних на 0,5 мм вправо.

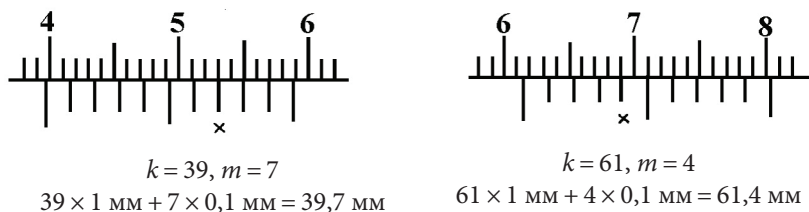


Рис. 1.7. Примеры отсчета по нониусу, для которого  $l_2 = 1 \text{ мм}$  и  $\delta = 0,1 \text{ мм}$

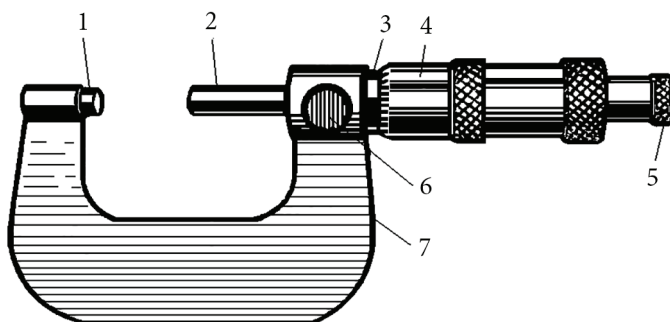


Рис. 1.8. Микрометр:

- 1 — упор; 2 — микрометрический винт; 3 — стебель;  
 4 — барабан; 5 — трещотка; 6 — стопор; 7 — скоба

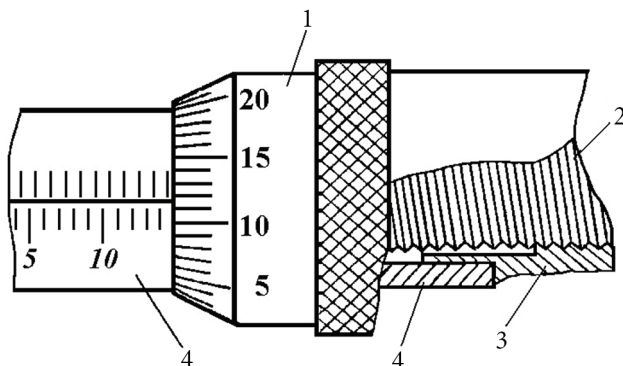


Рис. 1.9. Детальное изображение стебля и барабана микрометра (элементы 3 и 4 — на рис. 1.8):  
 1 — барабан; 2 — микровинт; 3 — резьбовая втулка;  
 4 — неподвижный стержень

Когда стержень винта и упор соприкасаются, край барабана должен совпасть с нулевым делением нижней линейки шкалы, а нулевое деление барабана должно в точности совпасть с осью линейной шкалы. Шаг микрометрического винта равен 0,5 мм. На барабане 50 делений, следовательно, поворот на одно деление соответствует смещению винта по горизонтали на 0,01 мм. Эта цифра дает *точность микрометра*.

Как уже было сказано, при измерении какого-либо линейного размера тело помещают между стержнем винта и упором. Затем вращают барабан, пользуясь насечкой и трещоткой (см. рис. 1.8) до тех пор, пока тело не окажется «зажатым». При этом нужно помнить, что заканчивать вращение барабана нужно обязательно трещоткой. Вращение нужно прекратить при первом же звуке трещотки и снять показания микрометра. Трещотка обеспечивает равномерность нажатия и предотвращает возникновение неисправностей из-за слишком сильного «сдавливания» предмета. При необходимости микровинт может быть закреплен при помощи стопора.

Отсчет показания микрометра делается так: по нижней линейной шкале отсчитывается число  $n$  — номер деления нижней линей-

ной шкалы, ближайшего к краю барабана. Этот номер дает целое число миллиметров. Если между ним и краем барабана не видно деления верхней шкалы (рис. 1.10, а, в), то измеряемая длина определяется по формуле

$$L = (n + 0,01n') \text{ мм}, \quad (1.6)$$

где  $n'$  — номер того деления на круговой шкале барабана, которое либо совпало с осью линейной шкалы, либо находится сразу под ней. Если же между  $n$ -м делением нижней шкалы и краем барабана видно деление верхней линейной шкалы (рис. 1.10, б, г), то длина тела определяется выражением

$$L = (n + 0,5 + 0,01n') \text{ мм}. \quad (1.7)$$

### 1.2.3. Линейка

Линейка является простейшим измерительным инструментом, представляющим собой узкую пластину, у которой как минимум одна сторона прямая. Обычно линейка имеет нанесенные штрихи (деления), кратные единице измерения длины (сантиметр, милли-

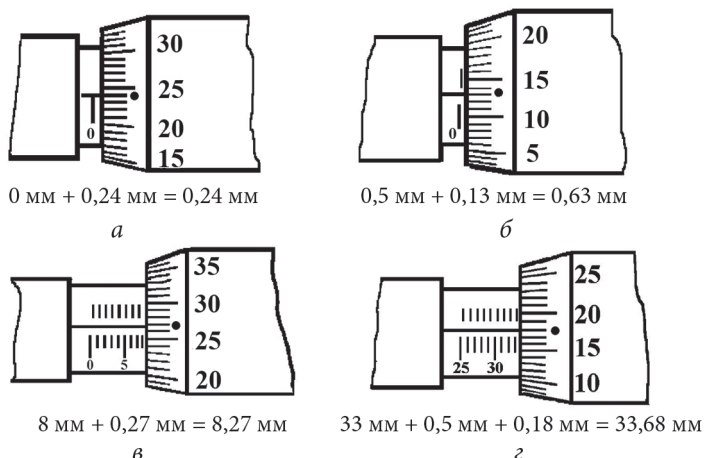


Рис. 1.10. Примеры отсчета показаний микрометра

метр, дюйм), которые используются для измерения расстояний. Несмотря на большое разнообразие линеек (угольники, рулетки, измерительные ленты и т. п.), принцип измерений одинаков. Начало линейки совмещается с одним из концов предмета, а положение второго конца предмета на шкале линейки позволяет зафиксировать его длину с точностью до 0,1 см.

### 1.3. Измерение плотности твердого тела

Плотностью вещества называется величина, равная отношению массы тела  $m$  к его объему  $V$ ; иначе говоря, плотность вещества — это величина, равная массе единицы объема этого вещества:

$$\rho = \frac{m}{V}. \quad (1.8)$$

Масса относится к числу немногих величин, значения которых могут быть определены непосредственным измерением с помощью взвешивания на весах (см. параграф 1.1). Напротив, объем тела определяется обычно путем косвенных измерений. Если образцы правильной геометрической формы (цилиндры, призмы, конусы и т. п.), то объем тела находят из измерений его линейных размеров (см. параграф 1.2).

Если же нужно определить плотность вещества образца неправильной формы или плотность сыпучих тел, то вычисление объема через линейные размеры невозможно, тогда используют другие методы. Среди них так называемый пикнометрический метод, в котором измерение объема заменяется серией взвешиваний.

В настоящем практикуме подробно описаны и используются оба этих способа определения плотности тел.

# Лабораторная работа 1

## Определение плотности вещества тел правильной геометрической формы

Цель работы:

- ознакомиться с простейшими методами измерения длины и массы, входящих в число основных величин, на которых основана система единиц СИ, и связанной с ними производной величины — плотности вещества;
- научиться объективно оценивать погрешности непосредственно измеряемых величин (прямые измерения) и непосредственно не измеряемых величин (косвенные измерения).

### Краткая теория

Распределение массы по объему тела характеризуется при помощи величины, называемой *плотностью*. В общем случае, при неравномерном распределении массы по объему тела, плотность определяется следующим образом:

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV}. \quad (1.9)$$

Здесь  $\Delta m$  — масса, заключенная в объеме  $\Delta V$ , который при предельном переходе стягивается в точку, где определяется плотность. Очевидно, что в общем случае плотность зависит от положения точки, т.е.  $\rho = \rho(x, y, z)$ .

Предельный переход в (1.9) не следует понимать так, что  $\Delta V$  стягивается буквально в точку, поскольку такое понимание математического определения предела приводит к тому, что величина плотности будет изменяться скачкообразно от точки к точке. Действительно, почти вся масса атома сосредоточена в его ядре, размер которого примерно в 100 тыс. раз меньше размера самого атома. Поэтому для двух практически совпадающих точек, одна из которых приходится на ядро, а другая — на промежуток между

атомами, получились бы результаты, колоссально отличающиеся друг от друга. В физике под предельным переходом  $\Delta V \rightarrow 0$  понимают уменьшение  $\Delta V$  до такой степени, пока не будет достигнут физически бесконечно малый объем. Под физически бесконечно малым объемом понимают такой объем, который, с одной стороны, достаточно мал, чтобы макроскопические свойства его можно было считать одинаковыми, с другой стороны, достаточно велик, чтобы он содержал большое число молекул и чтобы не проявлялась дискретность (прерывность) вещества.

Если тело однородно, т. е. его свойства во всех точках одинаковы, то плотность будет определяться по формуле (1.8). Так, например, если образец можно считать прямым круговым цилиндром, то объем его рассчитывается по формуле

$$V = \frac{\pi d^2}{4} l, \quad (1.10)$$

где  $d$  — диаметр основания цилиндра;  $l$  — его длина. Тогда, если предположить, что образец однороден, плотность его вычисляется по формуле

$$\rho = \frac{4m}{\pi d^2 l}. \quad (1.11)$$

Важно отметить, что в эту формулу входят только величины, значения которых определяются из прямых измерений.

Итак, если моделью образца, плотность которого подлежит измерению, является однородный круговой цилиндр, то  $\rho$  определяется по формуле (1.11).

Обсудим более подробно понятие *модели* объекта (явления, процесса) и возникающей в связи с этим погрешности измерений.

Под моделью понимают некоторый мысленный образ объекта (явления, процесса), опирающийся на уже известные понятия, позволяющий построить полезную аналогию, получить удобную математическую формулу для описания связи между свойствами

объекта. Можно сказать, что мы мыслим моделями, или, точнее, когда мы говорим что-либо о каком-либо объекте (явлении), мы передаем на самом деле информацию о параметрах модели этого объекта (явления). Ни одна модель не может быть вполне безупречной, абсолютно точной, иначе говоря, не может быть полностью адекватна реальному объекту. В силу этого степень адекватности модели подлежит экспериментальной проверке. Примерами моделей в механике являются, например, материальная точка, абсолютно твердое тело, идеальная жидкость и др.

В данной работе исследуемый объект — образец некоторого вещества, измеряемое свойство — плотность этого вещества. Для определения численного значения плотности необходимо провести косвенное измерение. При проведении косвенного измерения всегда используется модель исследуемого объекта. Визуальные наблюдения позволяют предположить модель формы исследуемого объекта — прямой круговой цилиндр. Следствием этого является формула (1.10) для определения объема образца. Предположение об однородности образца не столь очевидно, оно не следует из визуальных наблюдений, а определяется скорее способом и технологией изготовления образца. Таким образом, предполагается, что справедлива формула (1.8), где объем определяется формулой (1.10), т. е. плотность может быть вычислена по формуле (1.11).

Итак, проведя прямые измерения диаметра ( $d$ ), длины ( $l$ ) и массы ( $m$ ) цилиндра и подставив результаты этих измерений в формулу (1.11), можно определить численное значение плотности вещества, из которого изготовлен цилиндр. Очевидно, что полученное значение  $\rho$  будет отягощено погрешностью, которая обусловлена погрешностями измерительных инструментов. Кроме того, неточное соответствие между свойствами реального объекта и его моделью является источником еще одной погрешности (помимо инструментальной) — погрешности методической (погрешности модели). Поясним это на примере.



Предположим, что в качестве модели основания цилиндра выбран круг и измеряется диаметр образца, который, согласно модели, должен быть одинаков (рис. 1.11).

Пусть при определении пригодности этой модели измерения проводят в различных направлениях. Если при этом разности результатов измерения будут меньше погрешности прибора, то можно считать, что модель круга является адекватной при описании формы основания образца с точностью, равной погрешности прибора.

Однако может оказаться, что разность результатов измерений в разных направлениях превышает погрешность прибора. Этот факт указывает на неточность выбранной модели и требует более строгого анализа полученных результатов. Если при проведении такого анализа обнаруживается, например, что наибольший и наименьший результаты получены при измерениях во взаимно перпендикулярных направлениях и при этом результаты от максимального до минимального меняются достаточно монотонно, то это позволяет предложить в качестве уточненной модели формы основания эллипс (см. рис. 1.11).

Таким образом, если в данной ситуации при определении плотности образца используется модель круга для формы основания, то полученный результат будетотягощен погрешностью. Эта погрешность есть следствие неточности модели, т. е. погрешность

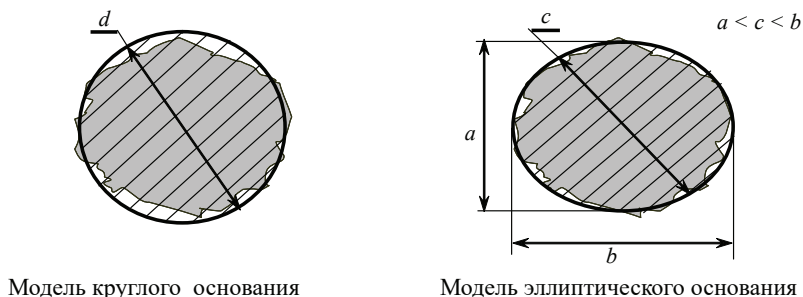


Рис. 1.11. Примеры моделей основания цилиндра

модели. Она имеет систематический характер. Проведение измерений в различных направлениях позволяет обнаружить и частично исключить эту погрешность, введя поправленную модель для формы основания — эллипс. Площадь эллипса, как известно, рассчитывается по формуле  $S = (\pi/4)ab$ , где  $a$  и  $b$  — длины осей эллипса (рис. 1.11). Очевидно, при этом изменится и формула (см. (1.11)). Она будет иметь вид  $\rho = (4m)/(\pi abl)$ . Следует понимать, однако, что модель эллипса не является единственной, описывающей наблюдаемое изменение результатов измерения диаметра. Такое изменение результатов можно описать, используя, например, модель четырех-центрального овала. Какая из возможных моделей в данной ситуации верна, можно установить только дальнейшими экспериментами.

В описанном выше примере показан один из способов частично-го исключения погрешности модели путем проведения измерений при различных условиях: проводились измерения диаметра основания в разных направлениях. Однако, в отличие от предыдущего примера, часто бывает, что анализ результатов измерений не выявляет какой-либо закономерности их изменения.

Рассмотрим следующий пример. Поскольку предполагается использование модели прямого кругового цилиндра, то, согласно этой модели, диаметр цилиндра должен быть одинаков на разных высотах. Пусть при проведении таких измерений оказалось, что полученные результаты изменяются беспорядочно, без какой-либо видимой системы. Причиной этому, помимо неизбежных погрешностей случайного происхождения, является сложный вид образующей. То есть нельзя считать прямым цилиндр, образующая которого есть отрезок прямой (рис. 1.12). Тем самым при вычислении объема цилиндра по формуле (1.10) будет допускаться погрешность, обусловленная погрешностью модели и имеющая систематический характер.

Для исключения такой погрешности надо предложить (как это делалось в предыдущем примере) уточненную модель образующей, но полученные результаты не дают достаточной информации для

этого. Следовательно, каким-либо образом необходимо хотя бы провести оценку погрешности, вносимую неточностью модели.

Для этого можно использовать так называемую процедуру *рандомизации*. Она предполагает такую методику проведения измерений, при которой погрешности, имеющей своей причиной неточность модели и выступающей в качестве систематической, можно было бы придать свойства случайной погрешности. В данном примере такую ситуацию можно создать, если высоты, на которых проводятся измерения диаметра, выбираются случайным образом. Среднее значение результатов таких измерений можно считать наилучшей оценкой значения диаметра, который является параметром модели прямого кругового цилиндра, и, следовательно, пользоваться для определения объема образца формулой (1.10), в которую вместо  $d$  следует подставлять среднее значения диаметра. Очевидно, что такой способ определения «диаметра» образцаотягощен погрешностью, но теперь эту погрешность можно оценить по формулам оценки случайной погрешности.

Рассмотренные выше примеры исключения и оценки погрешности измерений, привносимой неточностью, неадекватностью модели объекта, свойства которого измеряются, достаточно искусственны и элементарны. Однако они демонстрируют основные черты такого

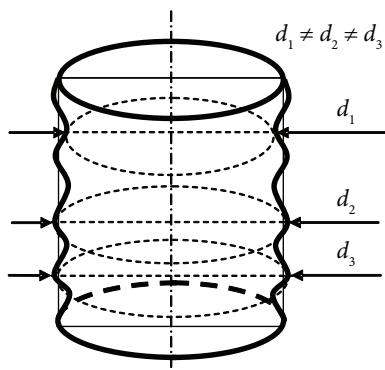


Рис. 1.12. Модель цилиндра со сложной образующей

анализа, применимого в той или иной степени в более общих случаях. К сожалению, однозначных рецептов для анализа адекватности модели дать невозможно.

В заключение следует отметить, что зачастую вообще невозможно сформулировать достаточно простую модель формы образца, плотность которого измеряется. Так бывает, если нужно определить плотность вещества образца неправильной формы, например, сыпучих тел. В этом случае вычисление объема через линейные размеры невозможно, и тогда используют другие методы измерения плотности. Среди них *пикнометрический метод*, в котором измерение объема заменяется серией взвешиваний. Этот способ подробно изложен в описании к лабораторной работе 2.

### Методика проведения эксперимента

Для определения плотности однородного образца, геометрическая форма которого моделируется прямым круговым цилиндром, необходимо, согласно (1.11), провести прямые измерения массы образца ( $m$ ) и его линейных размеров ( $l$ ,  $d$ ). Измерение массы с помощью весов описано в параграфе 1.1, а линейных размеров образца с помощью микрометра и штангенциркуля — в параграфе 1.2.

### Порядок выполнения работы и условия эксперимента

1. Получить у преподавателя образец, плотность вещества которого должна быть измерена.
2. Обдумать, какие линейные размеры должны быть измерены для последующего вычисления объема тела.
3. Выбрать средство измерения (штангенциркуль или микрометр) для каждого из линейных размеров образца.
4. Выполнить все необходимые измерения не менее 5 раз, результаты измерений занести в таблицу. Таблица с результатами измерений должна быть подписана преподавателем.

5. Взвесить тело на аналитических весах или по результатам измерений линейных размеров тела получить у преподавателя значение массы образца с известной погрешностью.

6. Вычислить значение плотности вещества, из которого изготовлен образец по формуле (1.11).

### Обработка результатов эксперимента

Обработать результаты измерений диаметра ( $d$ ), длины ( $l$ ) и массы ( $m$ ) образца, имеющего цилиндрическую форму, а также погрешности для прямых измерений согласно алгоритму, описанному в приложении. Получить для каждой величины результат по форме с доверительной вероятностью  $p = 0,95$ :

$$d = (\bar{d} \pm \Delta d) \text{ мм}, p = \dots,$$

$$l = (\bar{l} \pm \Delta l) \text{ мм}, p = \dots,$$

$$m = (\bar{m} \pm \Delta m) \text{ г}, p = \dots$$

Далее, подставляя средние значения измеренных величин в формулу (1.11), определяется наилучшая оценка ( $\bar{\rho}$ ) истинного значения плотности вещества, т. е.

$$\bar{\rho} = \frac{4\bar{m}}{\pi \bar{d}^2 \bar{l}}. \quad (1.12)$$

Теперь необходимо определить погрешность величины  $\bar{\rho}$ , которая является результатом косвенного измерения, для этого использовать формулу для определения погрешности косвенного измерения, которая в общем случае имеет вид

$$\Delta y = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial y}{\partial x_i} \Delta x_i \right)^2},$$

где  $\Delta y$  — абсолютная погрешность косвенно измеренной величины  $y$ , которая является функцией измеренных напрямую величин  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , имеющих абсолютные погрешности  $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ . В дан-

ном случае  $y \equiv \rho$ ,  $x_1 \equiv m$ ,  $x_2 \equiv d$  и  $x_3 \equiv l$ . Эта зависимость определяется формулой (1.11). Итак,

$$\Delta\rho = \sqrt{\left(\frac{\partial\rho}{\partial m}\Delta m\right)^2 + \left(\frac{\partial\rho}{\partial d}\Delta d\right)^2 + \left(\frac{\partial\rho}{\partial l}\Delta l\right)^2}. \quad (1.13)$$

Фигурирующие здесь частные производные находятся так же, как и обыкновенные производные от функции  $\rho$ , но при условии, что при взятии производной все аргументы, кроме того, по которому берется производная, считаются постоянными.

В результате для определения погрешности вычисления плотности получается следующее выражение:

$$\Delta\rho = \rho \sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + 4\left(\frac{\Delta d}{d}\right)^2 + \left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2}. \quad (1.14)$$

Окончательный результат для плотности должен быть записан в виде  $\rho = (\bar{\rho} \pm \Delta\rho) \text{ г/см}^3$ ,  $p = 0,95$ .

Теперь можно провести сравнение полученного значения плотности вещества с табличным значением. При ссылке на справочник обязательно нужно указать автора, название, издательство и год.

### Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определение плотности вещества.
2. В каких случаях можно проводить определение плотности с помощью массы и линейных размеров тела?
3. Что такое нониус? Как определяется его точность? Как проводится отсчет по нониусу?
4. Поясните алгоритм измерения линейных размеров тела с помощью штангенциркуля и микрометра.
5. Что такое погрешность модели?

## Лабораторная работа 2

### Измерение плотности твердых тел пикнометрическим методом

Цель работы:

- ознакомиться с устройством аналитических весов и методами высокоточного взвешивания;
- определить плотность образцов неправильной формы при помощи пикнометра.

#### Краткая теория

Плотностью вещества называется величина, равная отношению массы тела  $m$  к его объему  $V$ , которая определяется выражением (1.8). При определении плотности вещества образцов сложной геометрической формы вычислить объем образца через линейные размеры невозможно. В этом случае используют другие методы, среди которых так называемый пикнометрический метод.

Пикнометр (от греч. «пикнос» — плотный) представляет собой сосуд, изготовленный из стекла (вследствие его малой химической активности), объем которого известен с большой точностью. По Государственному стандарту при объеме пикнометра  $100 \text{ см}^3$  допустимая погрешность составляет  $0,12 \text{ см}^3$ , а для пикнометра высшего класса —  $0,012 \text{ см}^3$ . Сосуд имеет узкое горло и глухую пробку для уменьшения испарения. Такая конструкция пикнометра позволяет достаточно точно заполнить его жидкостью до метки, нанесенной на узком горлышке. Объем жидкости в этом случае и есть обозначенный объем пикнометра.

Пикнометрический метод измерения плотности состоит в следующем:

1. Пикнометр заполняют дистиллированной водой (до метки), закрывают пробкой и взвешивают. Масса пикнометра с водой  $M_0$ , очевидно, равна

$$M_0 = \rho_0 \cdot V_p + m_p. \quad (1.15)$$

Здесь  $\rho_0$  — плотность воды при температуре опыта;  $V_p$  и  $m_p$  — объем и масса сосуда.

2. Взвешивают исследуемый образец. Очевидно, что его масса  $m$  равна

$$m = \rho V, \quad (1.16)$$

где  $\rho$  — искомая плотность образца;  $V$  — объем образца.

3. Исследуемый образец погружают в пикнометр с водой. Излишек воды удаляют, чтобы ее уровень снова совпал с меткой на горлышке пикнометра. Определяют массу  $M$  пикнометра с водой и образцом:

$$M = \rho V + \rho_0 (V_p - V) + m_p = m + \rho_0 (V_p - V) + m_p. \quad (1.17)$$

Вычитая (1.17) из (1.15) и прибавляя (1.16), определяем массу вытесненной воды:  $M_0 - M + m = \rho_0 V$ . Определив отсюда объем  $V$ , получим выражение для искомой плотности

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{M_0 - M + m} \cdot \rho_0. \quad (1.18)$$

Эта формула используется в работе для вычисления плотности. Однако следует помнить, что получена она при условии точного равенства заполнения пикнометра до и после помещения в него образцов. Оценим погрешность, допускаемую в том случае, когда объемы заполнения до и после погружения образцов в пикнометре отличаются на величину  $v$ . Тогда уравнение (1.17) будет иметь вид

$$M = m + \rho_0 (V_p - V + v) + m_p. \quad (1.19)$$

Решая систему уравнений (1.15), (1.16), (1.19), получим для расчета плотности вместо формулы (1.18) следующее выражение:



$$\rho = \frac{m\rho_0}{m - M + M_0 + \nu\rho_0} = \frac{m\rho_0}{m - M + M_0} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\nu\rho_0}{m - M + M_0}}.$$

Расчет плотности по формуле (1.18) в этом случае привел бы к неверному значению  $\rho^*$ . Нетрудно получить, что

$$\frac{\rho}{\rho^*} = \frac{1}{1 + \frac{\nu}{V}} = \frac{1}{1 + \left(\frac{\nu}{V_p}\right)\left(\frac{V_p}{V}\right)}.$$

Проведем оценку. При площади сечения горлышка пикнометра  $\sim 0,5 \text{ см}^2$  и несовпадении уровней до и после погружения образцов  $\sim 1 \text{ мм}$  величина  $\nu$  составит около  $0,05 \text{ см}^3$ , что дает значение  $\nu/V$  ( $V_p = 100 \text{ см}^3$ ) порядка  $0,15 \%$ . Объем образцов  $V$  выбирается так, чтобы  $V/V_p \approx 1/3$ . Таким образом, получаем, что несовпадение объема заполнения пикнометра до и после погружения образцов может привести к ошибке около  $(0,1-0,2)\%$  от истинного значения плотности.

В дальнейшем для определения  $\rho$  будет использоваться формула (1.18). Из нее видно, что пикнометрический способ предполагает как можно более точное измерение масс  $M$ ,  $m$  и  $M_0$ . В данной работе для этой цели используются аналитические весы АДВ-200.

### Методика эксперимента

Измерение массы выполняется путем высокоточного взвешивания на аналитических весах, как описано в параграфе 1.1. Однако результат взвешивания отягощен еще одной погрешностью, которая возникает потому, что взвешивание производится в воздухе. Дело в том, что при взвешивании определяется, в общем-то, не масса образца, а сила, действующая со стороны образца на коромысло весов (точнее, момент этой силы). Эта сила зависит от того, в какой среде находится образец, так как на тело, кроме силы тяжести, действует еще и выталкивающая сила Архимеда. Однако возника-

ющую из-за этого погрешность можно исключить, введя поправку на кажущуюся потерю веса тела в воздухе (в воде). Такую поправку можно ввести для каждого результата взвешивания, необходимого для определения  $\rho$ , а уже поправленные значения  $M$ ,  $M_0$  и  $m$  подставить в формулу (1.18) и получить поправленное значение плотности образца. Но это значение можно определить и другим способом.

Непоправленная плотность, как говорилось выше, определяется по формуле (1.18). Введем обозначения:  $\rho_1$  — истинная плотность образца,  $\rho_a$  — плотность воздуха,  $\rho_b$  — плотность разновесов материала. Тогда  $\rho_1 V$  будет истинная масса кусочков испытуемого тела;  $\rho_0 V$  — истинная масса вытесненной ими воды,  $\rho_a V$  — масса воздуха, вытесненного кусочками;  $m(\rho_a/\rho_b)$  — масса воздуха, вытесненного разновесами, уравновешивающими кусочки;  $(M_0 - M - m)(\rho_a/\rho_b)$  — масса воздуха, вытесненного разновесами, уравновешивающими вытесненную воду. Тогда

$$\rho_1 V - \rho_a V = m - m \frac{\rho_a}{\rho_b} \quad \text{или} \quad V(\rho_1 - \rho_a) = m \left( 1 - \frac{\rho_a}{\rho_b} \right).$$

Аналогично для воды имеем

$$V(\rho_0 - \rho_a) = (M_0 - M + m) \left( 1 - \frac{\rho_a}{\rho_b} \right).$$

Деля эти равенства, получаем

$$\frac{\rho_1 - \rho_a}{\rho_0 - \rho_a} = \frac{m}{M_0 - M + m},$$

откуда

$$\rho_1 = \frac{m}{M_0 - M + m} (\rho_0 - \rho_a) + \rho_a = \rho \left( 1 - \frac{\rho_a}{\rho_0} \right) + \rho_a. \quad (1.20)$$

## Порядок выполнения работы и условия эксперимента

1. Определить нулевую точку весов и цену деления световой шкалы.

2. Взвесить пикнометр с водой. Взвешивание произвести не менее 5 раз, используя различные наборы разновесов. Найти среднее  $M_0$ , случайные и систематические погрешности величины  $M_0$ .

3. Взвесить исследуемые образцы, как это делалось в п. 2 для пикнометра с водой. Их объем должен составлять примерно треть объема пикнометра.

4. Высыпать образцы в пикнометр. Отобрать излишек воды (шприцем или фильтровальной бумагой). При этом следует добиться того, чтобы на образцах не оставались пузырьки воздуха. Определить массу  $M$  пикнометра с остатками воды и образцами, как в п. 2.

5. Рассчитать значение  $\rho$  и его погрешности. Определить исправленное значение плотности  $\rho_1$ .

## Обработка результатов эксперимента

После выполнения всех взвешиваний в нашем распоряжении имеется набор средних значений  $\bar{M}_0, \bar{M}, \bar{m}$ , а также их систематические и случайные погрешности. По средним величинам рассчитывается неисправленное значение плотности  $\rho$  по формуле (1.18) и исправленное с учетом выталкивающей силы воздуха значение плотности  $\rho_1$  по формуле (1.20). Величины  $\rho_0$  и  $\rho_a$  берутся из таблиц и в дальнейшем их можно считать известными точно.

Значение  $\rho$  является результатом косвенных измерений, т. е. погрешность этой величины определяется по формуле (считаем, что  $\Delta\rho_0 = 0$ )

$$\Delta\rho = \sqrt{\left(\frac{\partial\rho}{\partial m}\Delta m\right)^2 + \left(\frac{\partial\rho}{\partial M_0}\Delta M_0\right)^2 + \left(\frac{\partial\rho}{\partial M}\Delta M\right)^2}.$$

Проведя дифференцирование, получаем

$$\Delta\rho = \frac{\rho_0}{(m - M + M_0)^2} \times \sqrt{(M - M_0)^2 (\Delta m)^2 + m^2 ((\Delta M)^2 + (\Delta M_0)^2)}. \quad (1.21)$$

Подставляя сюда случайные погрешности  $m$ ,  $M$ ,  $M_0$ , получаем погрешность  $\rho$ , обусловленную случайными погрешностями  $\left(\overset{\circ}{\Delta\rho}\right)$

(точнее, учитывая рандомизацию погрешности разновесов). Если в (1.21) подставить систематические погрешности, то получим погрешность  $\Delta_{\text{ср}}$ , обусловленную систематическими погрешностями прямых измерений. Полную погрешность можно рассчитать по формуле

$$\Delta\rho = \sqrt{\left(\overset{\circ}{\Delta\rho}\right)^2 + (\Delta_{\text{ср}})^2}.$$

### Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определение плотности вещества.
2. В каких случаях используется пикнометрический метод?
3. Как и для чего определяется нулевая точка весов?
4. Что такое чувствительность весов? В каких единицах она выражается?
5. Что такое цена деления шкалы весов? В каких единицах она выражается? Для чего и как она определяется?

## 2. УСКОРЕНИЕ СВОБОДНОГО ПАДЕНИЯ

### 2.1. Силы в природе

В настоящее время полагают, что в природе существуют только четыре типа фундаментальных взаимодействий:

- 1) гравитационные (взаимодействия, обусловленные всемирным тяготением);
- 2) электромагнитные (взаимодействия, обусловленные электрическими зарядами и осуществляемые через электрические и магнитные поля);
- 3) сильные, или ядерные (характеризуют силы притяжения между нуклонами в атомном ядре);
- 4) слабые (взаимодействия, ответственные за процессы взаимопревращений элементарных частиц).

Последние две силы проявляют себя в микромире и существенны для квантовой механики. В рамках классической механики имеют дело только с гравитационными и электромагнитными взаимодействиями. Важнейшее проявление гравитационных взаимодействий — сила тяжести. Упругие силы и силы трения имеют в основе электромагнитные взаимодействия, поскольку определяются характером межмолекулярных взаимодействий. Они

действуют между телами в целом электрически нейтральными, т. е. имеющими одинаковое число положительных и отрицательных зарядов. Суммарная электромагнитная сила, порождаемая этими зарядами, имеет очень малый радиус действия. Поэтому можно считать, что упругие силы и силы трения возникают лишь при непосредственном контакте тел. Строгий расчет упругих сил и сил трения на основе электромагнитных взаимодействий (как говорят, из первых принципов) провести не удастся. Это связано с чрезвычайно большим числом заряженных частиц, участвующих в этих взаимодействиях. Поэтому для упругих сил и сил трения используют приближенные эмпирические законы. Константы в этих законах определяются экспериментально, причем, в отличие от фундаментальных констант, они имеют различные значения для различных материалов.

Сила тяжести, т. е. сила притяжения тела Землей вблизи ее поверхности, может быть выведена из закона гравитационных взаимодействий, если считать, что земной шар неподвижен, имеет сферическую форму и однороден по плотности. Поскольку в реальной ситуации эти условия не выполняются, то константа, входящая в выражение силы тяжести (ускорение свободного падения) будет зависеть от географических координат, высоты над уровнем земли, плотности пород земной коры в данном месте. Ее более или менее точное значение может быть установлено только экспериментально. Таким образом, для получения количественных результатов в механике (да и в других разделах физики тоже) надо знать численные значения констант, которые можно определить лишь опытным путем. Кроме того, эксперимент может дать информацию о пределах применимости того или иного закона.

## 2.2. Закон всемирного тяготения

Закон всемирного тяготения был сформулирован Ньютоном в 1667 г.: *сила взаимного притяжения двух тел прямо пропорциональна произведению масс этих тел и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними.*

Величина этой силы записывается в виде

$$F = G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}, \quad (2.1)$$

где  $m_1$  и  $m_2$  — массы тел;  $r$  — расстояние между центрами масс этих тел. Коэффициент пропорциональности  $G$  называется гравитационной постоянной. Формулу (2.1) для расчета силы тяготения можно применять только для таких тел, размеры которых малы по сравнению с расстоянием между ними, т.е. для материальных точек. Однако доказано, что эта формула применима и для сферических тел, однородных, а также таких, плотность которых зависит лишь от расстояний до их центров. В этом случае  $r$  — расстояние между центрами шаров. Сила тяготения направлена вдоль прямой, проходящей через взаимодействующие точки (рис. 2.1).

В векторном виде силу, с которой вторая материальная точка ( $m_2$ ) притягивает к себе первую ( $m_1$ ), можно записать в следующем виде:

$$\vec{F}_{12} = G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \frac{\vec{r}_{12}}{r}, \quad (2.2)$$

где  $\vec{r}_{12}$  — радиус-вектор, проведенный от точки  $m_1$  к точке  $m_2$  (рис. 2.1). Нетрудно видеть, что величина  $\vec{r}_{12}/r$  есть единичный вектор в направлении от первой точки ко второй. Заменяв в формуле (2.2) вектор  $\vec{r}_{12}$  вектором  $\vec{r}_{21}$ , проведенным от точки  $m_2$  к точке  $m_1$ , получим силу  $\vec{F}_{21}$ , действующую на вторую материальную точку.

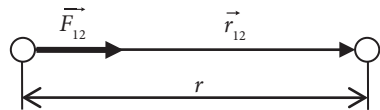


Рис. 2.1. Схематичное изображение силы тяготения

Гравитационная постоянная  $G$  относится к числу фундаментальных констант, численные значения которых можно установить только экспериментально. Первой успешной попыткой определения  $G$  были измерения, осуществленные Г. Кавендишем в 1798 г. Он впервые применил для измерения малых сил чувствительный метод крутильных колебаний. В настоящее время значение гравитационной постоянной известно с высокой точностью. Будем использовать следующее значение:

$$G = 6,670 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2/\text{кг}^2.$$

Используя выражение для силы (2.1), нетрудно сосчитать, что два шара массой 1 кг каждый, центры которых отстоят друг от друга на расстоянии 1 м, притягиваются силой  $6,670 \cdot 10^{-11}$  Н. Как известно, все тела вблизи поверхности Земли при свободном падении приобретают примерно одинаковое ускорение относительно поверхности Земли, которое принято обозначать буквой  $g$ . Это означает, что в системе отсчета, связанной с Землей, на всякое тело массой  $m$  действует сила притяжения  $\vec{F} = m\vec{g}$ , называемая силой тяжести. Сила тяжести обусловлена в основном гравитационным взаимодействием между Землей и материальным телом. Если считать Землю идеальным шаром радиуса  $R_3$  и массой  $M_3$ , то напряженность гравитационной силы на расстоянии  $h$  от поверхности направлена к центру Земли и равна по величине

$$g = G \frac{M_3}{(R_3 + h)^2}. \quad (2.3)$$

Следовательно, на тело массой  $m$ , которое можно считать материальной точкой или шаром, будет действовать сила притяжения, направленная к центру Земли и равная по величине

$$F = G \frac{m \cdot M_3}{(R_3 + h)^2}.$$



Здесь необходимо отметить следующее. Понятие массы фигурирует в двух различных законах — во втором законе Ньютона и в законе всемирного тяготения. В первом случае она характеризует инертные свойства тела, т. е. способность его реагировать на действие силы; во втором — гравитационные свойства тела, т. е. способность тел притягивать друг друга. Это различные свойства и величины, которые априори нельзя полагать равными. В настоящее время не существует теории, которая показывала бы эквивалентность инертной и гравитационной масс. Однако ни один эксперимент в пределах своей точности не обнаружил их количественное отличие. Поэтому можно говорить просто о массе как о физической величине, характеризующей инертные и гравитационные свойства тел. Таким образом, величину ускорения свободного падения на высоте  $h$  от поверхности Земли будем описывать формулой (2.3). В непосредственной близости от поверхности Земли при  $h = 0$  ускорение свободного падения определяется только радиусом и массой Земли. Обозначив эту величину  $g_0$ , получаем

$$g_0 = G \frac{M_3}{R_3^2}. \quad (2.4)$$

Считая массу Земли  $M_3$  примерно равной  $6,0 \cdot 10^{24}$  кг и радиус Земли  $R_3 \approx 6,4 \cdot 10^6$  м, нетрудно оценить величину  $g_0$  по формуле (2.4):

$$g_0 \approx 6,670 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2} \cdot \frac{6,0 \cdot 10^{24} \text{ кг}}{(6,4 \cdot 10^6 \text{ м})^2} \approx 9,8 \frac{\text{Н}}{\text{кг}} = 9,8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Еще раз напомним, что выражение (2.4) справедливо только в том случае, если

- Землю считать неподвижным идеальным шаром со сферически симметричным распределением плотности;
- тело, притягиваемое Землей, находится вблизи поверхности Земли и его можно считать материальной точкой (или шаром).

Оценим влияние движения и несферичности Земли на величину ускорения свободного падения. Хорошо известно, что движение

Земли достаточно сложное и напоминает движение волчка: она вращается с периодом 24 часа вокруг своей оси, которая, в свою очередь, описывает коническую поверхность в пространстве (прецессирует с периодом около 26 000 лет). При этом она вращается вокруг Солнца на среднем расстоянии 149 597 900 км с периодом 365,26 суток. На величину ускорения свободного падения прецессия и вращение вокруг Солнца влияют пренебрежимо мало. Рассмотрим влияние на величину  $g$  суточного вращения, т. е. вращения Земли вокруг своей оси. Как известно, в неинерциальной системе отсчета, вращающейся с угловой скоростью  $\omega$ , на тело массой  $m$ , находящееся на расстоянии  $R$  от оси вращения, действует центробежная сила инерции  $F_{\text{цб}} = m\omega^2 R$ . Если высота тела над поверхностью невелика, можно положить  $R = R_3 \cos \varphi$ , где  $\varphi$  — широта местоположения тела (рис. 2.2), и выражение для  $F_{\text{цб}}$  примет вид

$$F_{\text{цб}} = mR_3\omega^2 \cos \varphi. \quad (2.5)$$

Таким образом, наблюдаемое относительно Земли ускорение свободного падения  $\vec{g}$  определяется не только действием гравитационной силы  $\vec{F}_{\text{гр}}$ , но и действием центробежной силы инерции  $\vec{F}_{\text{цб}}$ . Результирующая этих сил  $\vec{P} = \vec{F}_{\text{гр}} + \vec{F}_{\text{цб}}$  и есть сила тяжести.

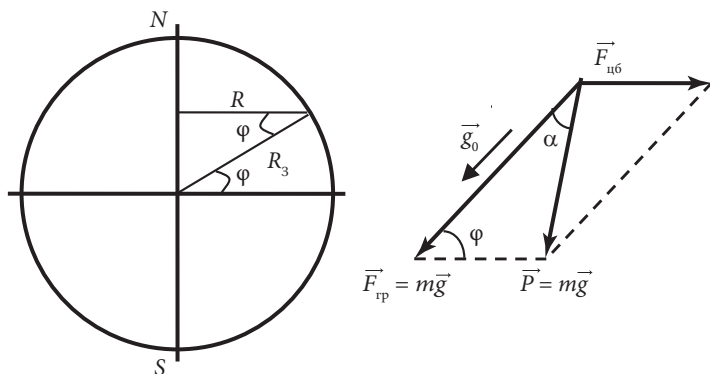


Рис. 2.2. Силы, действующие на тело, находящееся вблизи поверхности Земли

Отличие силы тяжести  $\vec{P}$  от гравитационной силы  $\vec{F}_{\text{гр}}$  невелико, так как центробежная сила инерции  $\vec{F}_{\text{цб}}$  значительно меньше гравитационной  $\vec{F}_{\text{гр}}$ . Например, для массы в 1 кг наибольшее значение центробежной силы  $\vec{F}_{\text{цб}}$ , наблюдаемое на экваторе ( $\varphi = 0$ ), равно

$$F_{\text{цб}} = mR_3\omega^2 \cos \varphi = mR_3 \frac{4\pi^2}{T^2} = 6,4 \cdot 10^6 \frac{4\pi^2}{(24 \cdot 3600)^2} = 0,034 \text{ Н},$$

в то время как  $\vec{F}_{\text{гр}}$  равна приблизительно 9,8 Н, т. е. почти в 300 раз больше.

Направление силы  $\vec{P}$  совпадает с направлением нити, натянутой грузом, которое называется направлением отвеса, или вертикалью. Сила  $\vec{F}_{\text{гр}}$  направлена к центру Земли. Следовательно, вертикаль направлена к центру Земли только на полюсах ( $\varphi = 90^\circ$ ,  $\vec{F}_{\text{цб}} = 0$ ) и на экваторе ( $\vec{F}_{\text{цб}} \parallel \vec{F}_{\text{гр}}$ ), отклоняясь на промежуточных широтах на угол  $\alpha$ , который можно определить (рис. 2.2), используя теорему синусов:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \varphi} = \frac{F_{\text{цб}}}{P} = \frac{m\omega^2 R_3 \cos \varphi}{mg},$$

$$\sin \alpha = \frac{\omega^2 R_3}{g} \sin \varphi \cdot \cos \varphi = \frac{\omega^2 R_3}{2g} \sin 2\varphi \approx 0,0018 \sin 2\varphi.$$

Поскольку синус малого угла приближенно равен значению самого угла, то получим  $\alpha \approx 0,0018 \sin 2\varphi$ . Таким образом, угол  $\alpha$  изменяется в пределах от нуля (на экваторе, где  $\varphi = 0$ , и на полюсах, где  $\varphi = 90^\circ$ ) до 0,0018 рад или 6' (на широте  $45^\circ$ ). Из рис. 2.2 видно, что вектор ускорения свободного падения равен

$$\vec{g} = \frac{\vec{P}}{m} = \left( \frac{\vec{F}_{\text{гр}}}{m} \right) + \left( \frac{\vec{F}_{\text{цб}}}{m} \right).$$

Модуль  $\vec{g}$ , очевидно, можно рассчитать, используя теорему косинусов (рис. 2.2):

$$\begin{aligned} g &= \sqrt{\left(\frac{F_{\text{гп}}}{m}\right)^2 + \left(\frac{F_{\text{цб}}}{m}\right)^2 - 2\left(\frac{F_{\text{гп}}}{m}\right)\left(\frac{F_{\text{цб}}}{m}\right)\cos\varphi =} \\ &= \sqrt{g_0^2 + \left(\omega^2 R_3 \cos\varphi\right)^2 - 2g_0\left(\omega^2 R_3 \cos\varphi\right)\cos\varphi =} \\ &= g_0 \sqrt{1 - \frac{\omega^2 R_3}{g_0} \left(2 - \frac{\omega^2 R_3}{g_0}\right) \cos^2\varphi}. \end{aligned}$$

Второе слагаемое в круглых скобках много меньше первого, и им можно пренебречь. Далее, учитывая малость величины  $(\omega^2 R_3/g_0)$  по сравнению с единицей и используя приближенное равенство  $(1-x)^{1/2} \approx 1 - (x/2)$ , справедливое при малых  $x$ , выражение для  $g$  значительно упрощается:

$$g = g_0 - \omega^2 R_3 \cos^2\varphi. \quad (2.6)$$

Численные оценки показывают, что на экваторе ускорение свободного падения на 0,3 % меньше, чем на полюсах, где оно равно  $g_0$ . При выводе формулы (2.6) предполагается, что Земля есть вращающийся вокруг оси идеальный шар. Уменьшение  $g$  с уменьшением широты является следствием действия на притягиваемое тело еще и центробежной силы инерции. Однако центробежная сила инерции действует и на «материал» Земли. Поскольку породы, из которых сложена Земля, не являются абсолютно жесткими, действие на них сил инерции увеличивает экваториальный диаметр и уменьшает полярный, что приводит к образованию так называемого экваториального вздутия. Косвенным доказательством этому может служить тот факт, что глубина океана в полярных и экваториальной областях примерно одинакова (рис. 2.3).

Тщательные измерения показывают, что экваториальный диаметр больше полярного на 43 км (1/298 долю). Влияние экваториального вздутия на величину  $g_0$  можно грубо оценить, считая,

что  $g_0$  определяется только расстоянием от данной точки земной поверхности до центра Земли. Тогда

$$\frac{(g_0)_{\text{пол}}}{(g_0)_{\text{эkv}}} = \frac{R_{\text{эkv}}^2}{R_{\text{пол}}^2} = \left( \frac{D_{\text{эkv}}}{D_{\text{пол}}} \right)^2 = \left( \frac{12\,800 + 43}{12\,800} \right)^2 = \left( 1 + \frac{1}{298} \right)^2 \approx 1,007.$$

Более точный учет формы Земли (называемой геоидом) дает превышение ускорения свободного падения на полюсах на 0,2 % по сравнению с ускорением на экваторе. Таким образом, суммарное изменение величины ускорения свободного падения с широтой, обусловленное суточным вращением Земли, достигает около 0,5 %, составляя величину  $9,780 \text{ м/с}^2$  на экваторе и  $9,832 \text{ м/с}^2$  на полюсах. Значение  $g = 9,80665 \text{ м/с}^2$  принято в качестве нормального (стандартного) значения.

Земля не обладает сферически симметричным распределением плотности. Это следует хотя бы из того, что Земля не является шаром. Кроме того, существуют локальные нарушения сферической симметрии распределения плотности пустоты, включения более плотных пород и т. п. Все это приводит к локальным изменениям величины ускорения свободного падения. На модели можно показать, что относительное изменение значения  $g$ , возникшее в результате

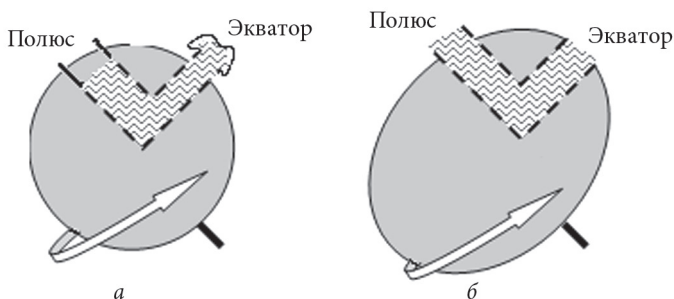


Рис. 2.3. Распределение уровня воды в различных точках Земли: а — идеальная твердая сферическая Земля, при ее вращении вода в трубе должна стекать от полюса к экватору; б — реальная Земля с экваториальным вздутием, уровень воды у полюса и экватора одинаков

локального изменения плотности, составляет величину  $r/R_3$ , где  $r$  — радиус сферической полости, находящейся в Земле, представленной идеальным однородным шаром плотностью  $\rho$ . Так, если  $r = 10$  км, то изменение  $g$  будет около 0,2 %, что соизмеримо с изменением ускорения свободного падения, обусловленного вращением Земли.

Пусть тело не находится вблизи поверхности Земли. В этом случае ускорение свободного падения определяется формулой (2.3). Преобразуем ее следующим образом:

$$\begin{aligned} g &= G \frac{M_3}{(R_3 + h)^2} = G \frac{M_3}{R_3^2} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{h}{R_3}\right)^2} = \\ &= \frac{g_0}{\left(1 + \frac{h}{R_3}\right)^2} \approx g_0 \left(1 - 2 \frac{h}{R_3}\right). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Отсюда видно, что ускорение свободного падения на высоте  $h$  будет заметно отличаться от  $g_0$  только в случае, если  $h$  составляет заметную долю от  $R_3$  ( $R_3 \approx 6400$  км). Так, при  $h = 100$  км величина  $g$  меньше  $g_0$  примерно на 3 %. На высоте в 10 км ускорение свободного падения  $g$  будет отличаться от  $g_0$  примерно на 0,3 %. Таким образом, формула (2.3) дает приемлемую точность ( $< 0,3$  %) при расчете ускорения свободного падения с высот менее 10 км.

Допустим, что притягиваемое тело нельзя считать материальной точкой. Очевидно, что в этом случае выражение (2.4) для  $g_0$  не точно. Для оценки возможных изменений величины ускорения свободного падения, связанных с неприменимостью модели материальной точки для притягиваемого тела, рассмотрим тело массой  $m_k$ , имеющее форму кольца радиусом  $a$  (рис. 2.4).

Величина силы  $d\vec{F}_k$ , действующей на элемент кольца  $dl$ , масса которого  $dm_k$ , равна

$$dF_k = G \frac{M \cdot dm_k}{r^2},$$

где  $dm_k = \frac{m_k}{2\pi a} \cdot dl$ .

Здесь величина  $\frac{m_k}{2\pi a}$  есть масса единицы длины, называемая еще линейной плотностью. Таким образом,  $dF_k = G \frac{M \cdot m_k}{2\pi a \cdot r^2} dl$ .

Для определения полной силы необходимо просуммировать все элементарные векторы  $d\vec{F}_k$ . Вектор  $d\vec{F}_k$  имеет компоненты  $(d\vec{F}_k)_x$  вдоль оси  $x$  и  $(d\vec{F}_k)_\perp$  в направлении, перпендикулярном оси  $x$ . Суммируя (интегрируя) по всей длине кольца, нетрудно заметить, что каждому элементу кольца  $dl$  соответствует диаметрально противоположный элемент равной длины. Перпендикулярные компоненты сил, действующие на эти элементы, при суммировании взаимно компенсируются. Это справедливо для всех элементов кольца, так что в итоге суммарный вектор  $\vec{F}_k$  не имеет перпендикулярной составляющей, т.е. он направлен вдоль оси кольца  $x$ .

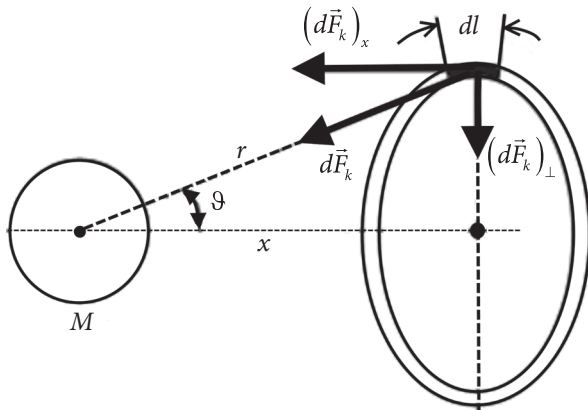


Рис. 2.4. Схематичное изображение силы, с которой сфера массой  $M$  будет притягивать однородное кольцо массой  $m_k$ , расположенное перпендикулярно линии, соединяющей центр сферы и центр кольца

Следовательно, для определения его величины необходимо просуммировать только величины  $x$  компонент векторов  $(d\vec{F}_k)_x$ , т. е. величины  $(dF_k)_x = dF_k \cos \vartheta$  (рис. 2.4). Тогда величина полной силы, действующей на кольцо со стороны сферы массой  $M$ , равна

$$F_k = \int dF_k = \int dF_k \cos \vartheta = G \frac{Mm_k}{2\pi a} \int \frac{\cos \vartheta}{r^2} dl.$$

Заметив, что  $\cos \vartheta = x/r$ , где  $r = (x^2 + a^2)^{1/2}$ , получаем силу притяжения  $F_k$ , действующую на кольцо со стороны Земли:

$$F_k = G \frac{Mm_k}{2\pi a} \cdot \frac{x}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi a} dl = GMm_k \frac{x}{(x^2 + a^2)^{3/2}}. \quad (2.8)$$

Тогда величина ускорения  $g_k$ , сообщаемого этой силой кольцу, вблизи поверхности Земли при  $x = R_3$  равна

$$\begin{aligned} g_k &= \frac{F_k}{m_k} = G M_3 \frac{R_3}{(R_3^2 + a^2)^{3/2}} = \\ &= \frac{G M_3}{R_3^2} \left(1 + \frac{a^2}{R_3^2}\right)^{-3/2} = g_0 \left(1 + \frac{a^2}{R_3^2}\right)^{-3/2}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Полученное выражение существенно упрощается, если радиус кольца много меньше радиуса Земли ( $a \ll R_3$ ). При этом условии можно воспользоваться формулой

$$(1 + x)^n \approx 1 + nx,$$

которая дает хорошую точность при малом  $x$  ( $x \ll 1$ ). Тогда получаем следующее выражение:

$$g_k = g_0 \left(1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{a^2}{R_3^2}\right).$$

Отсюда видно, что, для того чтобы величина  $g_k$  отличалась от величины  $g_0$  хотя бы на 0,1 %, радиус кольца должен составлять 2,5 %



от радиуса Земли, или примерно 160 км. Тел такого размера вблизи Земли не существует. Следовательно, модель материальной точки является хорошим приближением при описании гравитационного притяжения любых реальных тел Землей.

Завершая обсуждение вопросов, связанных с описанием гравитационного взаимодействия в механике, лежащего в основе понятия силы тяжести, следует подчеркнуть еще раз следующие обстоятельства. Закон всемирного тяготения можно считать точным для элементарно простых объектов механики — материальных точек. Однако практическое применение его возможно лишь после экспериментального определения численного значения гравитационной постоянной  $G$ . Использование этого закона для определения гравитационного взаимодействия реальных объектов, имеющих конечные размеры, требует привлечения дополнительной экспериментальной информации о распределении плотности вещества по объему объекта.

Экспериментальная информация требуется также при практическом вычислении силы тяжести. Так, знание величины плотности вещества необходимо для определения массы притягиваемого тела (зачастую прямое определение массы тела невозможно, в то время как его геометрические размеры определяются достаточно просто). Необходима также экспериментальная информация о величине ускорения свободного падения, поскольку на нее заметным образом влияет местоположение тела.

В лабораторном практикуме предлагается измерить величину ускорения свободного падения несколькими методами:

- 1) при помощи машины Атвуда;
- 2) с помощью физического (оборотного) маятника;
- 3) с помощью математического маятника.

### 2.3. Определение ускорения свободного падения с помощью машины Атвуда

Ускорение свободного падения  $g$  можно найти при помощи очень простого опыта: бросить тело с высоты  $h$  и измерить время падения  $t$ . Тогда  $g = 2h/t^2$ . В действительности дело обстоит не так просто, если величину  $g$  требуется определить достаточно точно. Время падения  $t$  с высоты  $h = 1$  м при  $g = 9,8$  м/с<sup>2</sup> равно

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1}{9,8}} \approx 0,45 \text{ с.}$$

При измерении такого промежутка времени с погрешностью  $\pm 0,01$  с относительная погрешность определения  $g$ , равная

$$\sqrt{\left(\frac{\Delta h}{h}\right)^2 + \left(\frac{\Delta t}{t}\right)^2}, \text{ будет более 4,5 \% и абсолютная погрешность}$$

$\Delta g > 0,5$  м/с<sup>2</sup>. Казалось бы, чтобы снизить погрешность определения  $\Delta g$ , используя секундомер с той же погрешностью  $\Delta t = \pm 0,01$  с, надо увеличить измеряемый промежуток времени, увеличивая высоту падения. Так, при  $h = 5$  м время падения составляет около 1 с, а при  $h = 20$  м — примерно 2 с. Однако в этом случае возникают ошибки другого характера. Дело в том, что при больших скоростях заметную роль играет сопротивление воздуха, а формула равноускоренного движения  $h = gt^2/2$  этого фактора не учитывает.

Таким образом, увеличивая высоту  $h$ , мы увеличиваем время падения и уменьшаем относительную погрешность его измерения, но при этом вносим другую ошибку: сама формула  $h = gt^2/2$  становится неточной. Например, если сбросить кирпич с высоты  $h = 500$  м, то около 200 м он будет двигаться с ускорением, а затем сила сопротивления воздуха станет равной силе тяжести (это будет при скорости около 70 м/с) и тело остальные 300 м будет двигаться с постоянной скоростью.

Приведенный простой пример наглядно демонстрирует общую черту любого физического эксперимента: точность определения какой-либо физической величины связана не только с точностью измерительных приборов, но и с тем, насколько точно принятая модель описывает данный опыт, иначе говоря, насколько модель адекватна экспериментальной ситуации. Очевидно, что при обработке экспериментальных данных по формулам приближенной модели полученные результаты будут отличаться от истинного значения измеряемой величины. Это отличие имеет смысл систематической погрешности. Для ее учета надо строить более точную модель эксперимента.

Итак, сложности такого внешне простого опыта связаны с большим ускорением тела, за которым мы следим во время опыта. Поскольку ускорение большое, то тело быстро набирает скорость, а при этом или время движения мало и его трудно измерить, или сама формула равноускоренного движения неточна.

### **2.3.1. Экспериментальная установка для измерения ускорения свободного падения с помощью машины Атвуда**

Уменьшить ускорение можно с помощью устройства, которое называется машиной Атвуда (рис. 2.5).

Через блок перекинута нить, на которой укреплены грузы массой  $M$  каждый. На один из грузов накладывается перегрузок массой  $m$ . Грузы начнут двигаться с ускорением  $a$ , проходя расстояние  $H$  за некоторое время  $t$ . Эти величины связаны между собой известным соотношением

$$H = \frac{at^2}{2} \text{ или } t^2 = \frac{2H}{a}, \quad (2.10)$$

которое позволяет узнать ускорение  $a$ , если измерены значения  $H$  и  $t$ .

Величина ускорения грузов  $a$  связана с величиной ускорения свободного падения  $g$ . Для установления такой связи необходимо построить модель экспериментальной ситуации, которая реализуется в машине Атвуда. Машина Атвуда представляет собой закреплен-

ную на основании вертикальную стойку, на которой установлены подвижный кронштейн и верхняя втулка с закрепленным блоком и электромагнитом. Через блок перекинута нить, на концах которой закреплены грузы массой  $M$ . Кронштейн можно перемещать вдоль стойки и фиксировать в любом положении. Тем самым устанавливается конечная точка движения  $h_1$ . Величина  $h_1$  отсчитывается по миллиметровой шкале, находящейся на вертикальной стойке против указателя на кронштейне. Начальная точка движения задается положением нижней грани груза  $h_2$ . Очевидно, что  $H = h_2 - h_1$ . Точность отсчета по линейке составляет  $\pm 1$  мм.

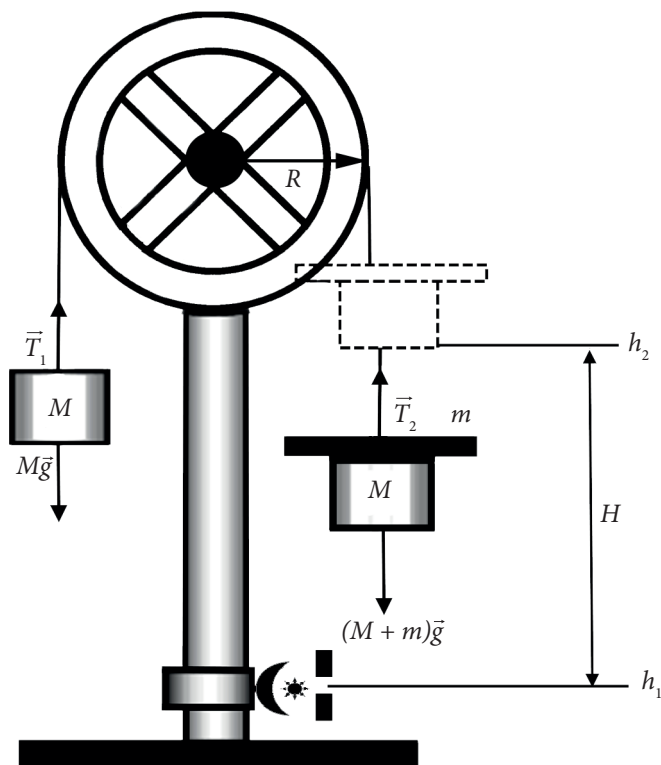


Рис. 2.5. Схема установки для измерения ускорения свободного падения (машина Атвуда)

На правом грузе могут помещаться перегрузки. Масса  $m$  этих перегрузков, а также масса грузов  $M$  обозначена на установке. Свободное движение системы завершается ударом о резиновые амортизаторы кронштейна, на котором также расположен фотодатчик, имеющий оптическую ось на уровне указателя положения кронштейна. При пересечении нижней гранью груза оптической оси фотодатчика вырабатывается электрический импульс, останавливающий секундомер. Тем самым фиксируется время прохождения расстояния  $H$ .

Цифровой миллисекундомер, к входам которого подключен фотодатчик, укреплен на том же основании, что и вертикальная стойка. Он может измерять промежутки времени от 0 до 99,999 с, относительная погрешность  $\pm 0,02\%$ . На лицевой панели миллисекундомера расположены три управляющие клавиши: «Сеть», «Пуск» и «Сброс». После подключения секундомера к сети нажатием клавиши «Сеть» схема сброса нуля устанавливает прибор в начальное состояние, обнуляя декады счетчика времени. При этом на электромагнит подается напряжение, и он фиксирует систему блока и грузов. При нажатии клавиши «Пуск» происходит отключение напряжения питания от электромагнита и формируется импульс, который обеспечивает подключение к счетчику времени эталонного кварцевого генератора с высокостабильной частотой, равной 1 МГц. До тех пор пока не поступит сигнал с фотодатчика, счетчик подсчитывает число импульсов кварцевого генератора. Сигнал с фотодатчика отключает эталонный генератор от счетчика времени, показания которого высвечиваются на световом табло. При этом вновь включается питание электромагнита. Нажатие клавиши «Сброс» устанавливает миллисекундомер в начальное состояние.

### **2.3.2. Экспериментальная установка для изучения равноускоренного движения с помощью машины Атвуда**

Для измерения скорости равноускоренного движения в установке применен способ, основанный на фундаментальном свойстве

тел двигаться по инерции, как только прекращается действие сил, вызывающих ускорение (рис. 2.6).

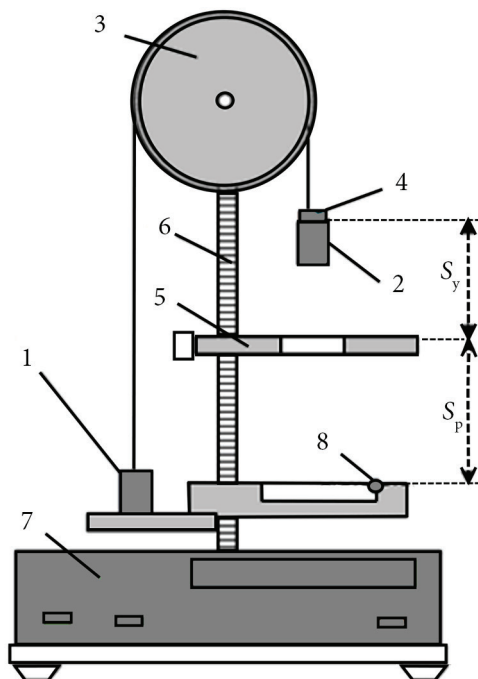


Рис. 2.6. Схема машины Атвуда:

- 1, 2 — грузы массой  $M$ ; 3 — неподвижный блок, через который перекинута нерастяжимая нить; 4 — перегрузок массой  $m$ ;  
5 — платформа; 6 — штанга; 7 — электронный секундомер;  
8 — фотоэлемент

На штанге закреплена платформа, которая автоматически снимает перегрузок в момент прохождения через нее верхней части груза 2. При этом причина ускорения исчезает, и далее на участке  $S_p$  груз движется равномерно с той самой скоростью, которую он приобрел к концу участка равноускоренного движения длиной  $S_y$ .

### Лабораторная работа 3

## Определение величины земного ускорения при помощи машины Атвуда

Цель работы — измерить величину ускорения свободного падения при помощи машины Атвуда.

#### Краткая теория

Схематичное изображение установки для измерения ускорения свободного падения, машины Атвуда, приведено на рис. 2.5. Наиболее простая модель нашей экспериментальной установки такова: блок и нить невесомы, нить нерастяжима; трением в блоке и сопротивлением воздуха можно пренебречь. Вектор ускорения левого груза направлен вверх, а правого с перегрузком — вниз. В силу нерастяжимости нити величины ускорений грузов одинаковы:  $a_1 = a_2 = a$ . Поскольку нить невесома, то и натяжение по всей ее длине одинаково, т. е.  $T_1 = T_2 = T$ . Координатную ось  $OX$  направим вниз. Тогда проекции уравнений движения на ось  $OX$  запишутся в следующем виде:

$$\begin{cases} -Ma = Mg - T, \\ (m + M)a = (m + M)g - T. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, получаем

$$a = g \frac{m}{2M + m}. \quad (2.11)$$

Таким образом, определив экспериментально зависимость  $t$  от  $H$ , по формуле (2.10) можно найти величину ускорения  $a$  и далее по формуле (2.11), используя известные значения  $m$  и  $M$ , рассчитать ускорение свободного падения  $g$ .

## Методика эксперимента

Схематичное изображение машины Атвуда и описание экспериментальной установки даны в 2.3.1. Зафиксировав на правом грузе перегрузок массой  $m$ , установив некоторую высоту  $H$ , можно снять зависимость времени падения грузов  $t$  от  $H$ . Эта зависимость и подвергается дальнейшей обработке с целью определения величины ускорения свободного падения. Значение массы грузов  $M$  и массы перегрузков  $m$ , а также количество значений  $H$  дает преподаватель.

### Порядок выполнения работы и условия эксперимента

1. Установить кронштейн в некоторое положение и по указателю на нем произвести отсчет величины  $h_1$ .

2. Подключить сетевой кабель миллисекундомера к сети питания. Нажать клавишу «Сеть». При этом индикаторы миллисекундомера должны высвечивать нули и должна гореть лампочка фотодатчика. Кроме того, электромагнит должен обеспечивать неподвижность системы.

3. На правый груз положить один из перегрузков и записать его массу. Установить нижнюю грань правого груза против какого-либо деления линейки. Отсчитать  $h_2$ . Вычислить значение  $H$  и записать его в табл. 2.1. Нажать клавишу «Пуск». Записать показание секундомера  $t$ . Для данного значения перемещения тела  $H$  измерение времени  $t$  провести трижды и результаты записать в таблицу. С одним и тем же перегрузком провести измерения времени опускания груза, изменяя значение  $H$  с шагом 2 см (например, с 28 до 10 см). В результате получится порядка 10 точек.

Таблица 2.1

Таблица для записи данных измерений в эксперименте  
с машиной Атвуда,  $m = \dots$  г

$H$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$\bar{t}$	$\Delta t$	$g$	$\Delta g$



4. По полученным значениям времени и высоты падения тела (табл. 2.1) построить график  $2H = f(t^2)$ , с помощью графического усреднения определить ускорение перегрузок и рассчитать  $g$ .

5. Зафиксировав значение  $H = 10$  см, провести исследование влияния массы перегрузка на значение ускорения свободного падения. Результаты измерений внести в табл. 2.2.

Таблица 2.2

Таблица для записи данных измерений в эксперименте  
с машиной Атвуда при фиксированной величине  $H = \dots$  м

$m, \text{ г}$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$\bar{t}$	$\Delta t$	$g$	$\Delta g$
10							
20							
30							
40							
50							

### Обработка результатов измерения

Обработку каждой таблицы для заданного значения  $m$  с целью определения величины  $g$  можно провести в следующей последовательности. Вначале рассчитываются  $H$  и  $\Delta H$  по формулам

$$H = h_2 - h_1 \quad \text{и} \quad \Delta H = \sqrt{(\Delta h_1)^2 + (\Delta h_2)^2},$$

где  $\Delta h_1$  и  $\Delta h_2$  — систематические погрешности измерения  $h_1$  и  $h_2$  соответственно. Они равны погрешности измерения при помощи линейки, т. е.  $\pm 1$  мм. Случайную погрешность определения  $H$  будем считать равной нулю. Далее рассчитываются среднеарифметическое значение  $t$  и случайная погрешность определения времени по формуле

$$\Delta t = t_{p,n} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^3 (\bar{t} - t_i)^2}{n(n-1)}},$$

где  $t_{p,n}$  — коэффициент Стьюдента, который для  $P = 0,95$  и  $n = 3$  равен 4,3. Систематическую погрешность определения времени можно считать равной нулю. По полученным значениям времени и высоты падения тела (см. табл. 2.1) построить график  $2H = f(t^2)$ . Определяя угловой коэффициент  $a = 2H/t^2$  из экспериментального графика, можно рассчитать среднее значение ускорения свободного падения  $g$  по формуле

$$g = a \frac{2M + m}{m}.$$

Таким образом, определение  $g$  является косвенным измерением. Формула для расчета погрешности  $\Delta g$  имеет вид

$$\Delta g = g \sqrt{\left(\frac{2M}{2M+m}\right)^2 \left[ \left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\Delta M}{M}\right)^2 \right] + \left(\frac{\Delta H}{H}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{\Delta t}{t}\right)^2}.$$

В данном выражении значения  $\Delta m$ ,  $\Delta M$ ,  $\Delta H$ ,  $\Delta t$  являются полными погрешностями, включающими в себя и систематическую, и случайную погрешности. Теперь окончательный результат обработки данных табл. 2.1 (для одной массы перегрузка) можно представить в виде

$$g = (g \pm \Delta g) \text{ м/с}^2, P = 0,95.$$

Для оценки роли влияния момента инерции блока, силы сопротивления воздуха и трения в блоке вычислить значение ускорения

свободного падения по формуле  $g = \frac{2H}{t^2} \cdot \frac{2M+m}{m}$ , используя ре-

зультаты измерений, внесенные в табл. 2.2. Проанализировать полученные результаты значения  $g$ .

## Контрольные вопросы и задания

1. Сформулируйте второй закон Ньютона.
2. Запишите уравнения движения на основе второго закона Ньютона для каждого груза лабораторной установки на участке равноускоренного движения.
3. Сформулируйте третий закон Ньютона. Приведите примеры выполнения третьего закона для сил, действующих на тела в лабораторной установке.
4. Выведите формулу для силы натяжения нити  $T$  при равноускоренном движении грузов на основе уравнений движения.
5. Покажите, что при очень малой массе перегрузка ( $m \ll M$ ) выполняется приближенное равенство  $T \approx Mg$ , а при  $m \gg M$  ускорение грузов стремится к ускорению свободного падения.
6. Какова последовательность выполнения измерений для опытного определения ускорения свободного падения  $g$  в данной лабораторной работе?
7. Перечислите фундаментальные физические взаимодействия. В основе каких «приближенных» сил в физике они лежат?
8. Сформулируйте закон всемирного тяготения и условия его применимости.
9. Какие факторы влияют на величину ускорения свободного падения?
10. При каких условиях можно использовать модель материальной точки при описании гравитационного притяжения реальных макроскопических тел Землей?

## Лабораторная работа 4

### Исследование кинематики равноускоренного движения

Цель работы:

- изучить законы кинематики материальной точки;
- экспериментально исследовать зависимости пути и скорости от времени при равноускоренном движении;
- опытным путем определить ускорение.

#### Краткая теория

Из определения механического движения как изменения положения тела в пространстве относительно других тел с течением времени следует, что для постановки и решения задач кинематики и динамики тела необходимо задать систему отсчета (совокупность тела отсчета, системы координат и часов). Кроме того, при решении физических задач используются модели движущегося реального тела. Материальная точка — модель такого объекта, который имеет массу, но размерами которого в условиях данной задачи можно пренебречь.

Положение материальной точки в выбранной системе координат задается радиус-вектором  $\vec{r}_A = \{x_A, y_A, z_A\}$  — вектором, проведенным из начала координат в данную точку  $A$ . При движении материальной точки ее радиус-вектор меняется. Линия в пространстве, по которой перемещается конец радиус-вектора материальной точки, называется *траекторией материальной точки*. Функция  $\vec{r}(t)$ , выражающая изменение радиус-вектора во времени, называется *законом*, или *кинематическим уравнением движения*. Закон движения можно записать как в векторной форме, так и в проекциях на координатные оси:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t). \end{cases} \quad (2.12)$$

Знание закона движения материальной точки позволяет определить вектор перемещения  $\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ , пройденный путь, уравнение траектории, радиус кривизны траектории, скорость, ускорение и другие характеристики движения. В частности, скорость движения материальной точки  $\vec{v}$  — векторная величина, определяющая быстроту изменения положения материальной точки в пространстве — может быть представлена в виде

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}(t) \text{ или } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = v_x(t), \\ \frac{dy}{dt} = v_y(t), \\ \frac{dz}{dt} = v_z(t). \end{cases} \quad (2.13)$$

Ускорение движения материальной точки  $\vec{a}$  — векторная величина, определяющая быстроту изменения скорости движения материальной точки, — может быть задано функциями

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}(t) \text{ или } \begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = a_x(t), \\ \frac{dv_y}{dt} = a_y(t), \\ \frac{dv_z}{dt} = a_z(t). \end{cases} \quad (2.14)$$

Например, закон прямолинейного равноускоренного движения вдоль оси  $Ox$  из точки  $x_0$  с начальной скоростью  $v_{0x}$  имеет вид

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}. \quad (2.15)$$

После дифференцирования этой формулы по времени получается формула для расчета проекции скорости

$$v_x(t) = v_{0x} + a_x t. \quad (2.16)$$

## Методика эксперимента

Описание экспериментальной установки машины Атвуда дано в 2.3.2. Скорость, приобретенная грузом 2 (рис. 2.6) к моменту снятия перегрузка, по формулам равноускоренного движения равна

$$v = \sqrt{2aS_y}, \quad (2.17)$$

где  $S_y$  — путь, пройденный телом при равноускоренном движении;  $a$  — ускорение, с которым двигался груз. Время движения груза на участке равномерного движения  $S_p$  равно

$$t = \frac{S_p}{v}. \quad (2.18)$$

Подставляя (2.17) в (2.18), получим

$$t = \frac{1}{\sqrt{2a}} \cdot \frac{S_p}{\sqrt{S_y}}. \quad (2.19)$$

График зависимости (2.19) будет прямой линией, если в качестве переменных выбрать  $t$  и  $S_p/\sqrt{S_y}$ . Наклон этой прямой, как следует из равенства (2.19), равен  $A = 1/\sqrt{2a}$ . Следовательно, если измерить значения времени  $t$  при различных положениях платформы (рис. 2.6) (при различных значениях  $S_p$  и  $S_y$ ), а затем построить экспериментальную зависимость  $t = t(S_p/\sqrt{S_y})$ , то по наклону этого графика можно рассчитать ускорение грузов:

$$a = \frac{1}{2A^2}. \quad (2.20)$$

Расстояния  $S_p$  и  $S_y$  измеряются по шкале, закрепленной на штанге, время  $t$  прохождения груза на участке  $S_p$  определяется по шкале миллисекундомера 7. Миллисекундомер автоматически включается в момент снятия перегрузка и автоматически выключается при достижении нижней частью груза фотодатчика 8.

## Порядок выполнения работы и условия эксперимента

1. Включить установку в сеть.

2. Нажать кнопку «Сброс» на передней панели миллисекундомера, при этом на цифровом индикаторе устанавливается нулевой отсчет. Одновременно включается электромагнит, который тормозит вращение диска, предотвращая тем самым преждевременное движение грузов.

3. Привести грузы в исходное состояние (рис. 2.6), перемещая ручную по пазам неподвижного диска (груз 1 опирается о нижнюю платформу, груз 2 висит в верхнем исходном положении).

4. Установить платформу в среднее положение. Записать значения  $S_p$  и  $S_y$  в таблицу (табл. 2.3).

5. Поместить любой из перегрузков на груз 2.

6. Успокоив ручную нежелательные колебания груза 2, нажать кнопку «Пуск» на передней панели секундомера. При этом электромагнитное торможение диска 3 (рис. 2.6) прекращается и система приходит в движение под действием сил тяжести.

7. После остановки системы (груз 2 внизу) зафиксировать по шкале миллисекундомера время движения  $t_1$  груза 2 на участке  $S_p$ . Записать значение  $t_1$  в четвертую строку первого столбца табл. 2.3.

8. Не изменяя положения платформы, произвести аналогичные измерения еще дважды. Полученные значения  $t_2$  и  $t_3$  занести в пятую и шестую строки первого столбца табл. 2.3.

9. Аналогичные измерения провести при двух других положениях платформы (выше и ниже среднего положения). Данные также занести в табл. 2.3.

## Обработка результатов эксперимента

1. Для каждого положения платформы 5 (рис. 2.6) рассчитать величины  $S_p / \sqrt{S_y}$ . Данные занести в табл. 2.3.

2. Для каждого положения платформы рассчитать средние значения промежутков времени равномерного движения грузов  $\bar{t}$ .

Таблица 2.3

Таблица для записи данных измерений в эксперименте  
с машиной Атвуда при исследовании равноускоренного движения

$S_p$ , м			
$S_y$ , м			
$S_p / \sqrt{S_y}$ , м <sup>1/2</sup>			
$t$ , с	$t_1$		
	$t_2$		
	$t_3$		
$\bar{t}$ , с			

3. Для одного из положений платформы рассчитать:

а) разности  $t_i - \bar{t}$ ,  $i = 1, 2, 3$ ;

б) среднеквадратичное отклонение  $\sigma_t$ ;

в) абсолютную погрешность  $\Delta t$  и относительную погрешность  $\delta t$  измерения промежутков времени.

4. Построить график зависимости  $t = t(S_p) \sqrt{S_y}$  и по его наклону рассчитать ускорение грузов по формуле (2.20).

5. Используя метод наименьших квадратов, определить погрешность ускорения грузов  $\Delta a$ .

### Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определения физических понятий: системы отсчета, радиус-вектора, скорости, ускорения, траектории.

2. Какое движение называется равноускоренным?

3. Каким образом связаны между собой путь, время и скорость прямолинейного равноускоренного движения?

4. Изобразите графически зависимости пути от квадрата времени и пути от квадрата скорости для равноускоренного движения.

5. Объясните принцип действия установки.

6. Изобразите графически зависимости координаты, скорости и ускорения грузов от времени, включая момент снятия перегрузки.

7. Каким образом из экспериментальных данных определяется ускорение грузов в установке?



## Лабораторная работа 5

### Исследование динамики равноускоренного движения

Цель работы:

- изучить законы Ньютона и уравнения движения материальной точки;
- экспериментально исследовать зависимость параметров равноускоренного движения от действующих сил;
- опытным путем определить ускорение свободного падения.

#### Краткая теория

В данной лабораторной работе исследуются динамические закономерности движения грузов, т. е. зависимость ускорения и скорости движения от сил, действующих на грузы.

Составим в соответствии с рис. 2.7 уравнения движения для грузов ( $M$  — масса груза,  $m$  — масса перегрузка):

$$\begin{cases} M\vec{a}_1 = M\vec{g} + \vec{T}_1, \\ (M + m)\vec{a}_2 = (M + m)\vec{g} + \vec{T}_2, \end{cases} \quad (2.21)$$

где  $\vec{a}_1, \vec{a}_2$  — ускорения грузов;  $\vec{T}_1, \vec{T}_2$  — силы натяжения нити. Учитывая малую массу шкива и нерастяжимость нити, можно считать, что

$$T_1 = T_2 = T \text{ и } a_1 = a_2 = a. \quad (2.22)$$

Проецируя силы в уравнении (2.21) на ось  $Y$ , направленную вверх для левого тела и вниз — для правого, с учетом (2.22) получим систему уравнений

$$\begin{cases} Ma = T - Mg, \\ (M + m)a = (M + m)g - T. \end{cases} \quad (2.23)$$

Складывая почленно уравнения (2.23), получим

$$a = g \frac{m}{2M + m}. \quad (2.24)$$

Пренебрегая в знаменателе малой массой перегрузка  $m$  по сравнению с массами грузов  $2M$ , упростим выражение (2.24):

$$a = g \frac{m}{2M}. \quad (2.25)$$

### Методика эксперимента

Описание экспериментальной установки машины Атвуда дано в 2.3.2. Скорость, приобретенная грузом 2 (рис. 2.6) к моменту снятия перегрузка, по формулам равноускоренного движения может быть выражена следующим образом (см. (2.17)).

$$v = \sqrt{2aS_y}. \quad (2.26)$$

Учитывая, что известное расстояние  $S_p$  груз 2 проходит равномерно за время  $t_p$ , которое можно измерить, эта скорость может быть определена экспериментально:

$$v = \frac{S_p}{t_p}. \quad (2.27)$$

Подставляя (2.27) в (2.26), получим

$$\frac{S_p}{\sqrt{S_y}} = \sqrt{2a} \cdot t_p. \quad (2.28)$$

Подставляя выражение (2.25) для  $a$  в (2.28), находим

$$\frac{S_p}{\sqrt{S_y}} = \sqrt{\frac{gm}{M}} \cdot t_p. \quad (2.29)$$

или

$$\frac{S_p^2}{S_y} = \frac{gm}{M} \cdot t_p^2. \quad (2.30)$$

Из (2.30) следует, что экспериментальная зависимость

$$\frac{S_p}{S_y} = f(t_p^2)$$

является линейной с угловым коэффициентом

$$A = \frac{gm}{M}. \quad (2.31)$$

Определяя угловой коэффициент  $A$  из экспериментального графика вида (2.30), можно рассчитать ускорение свободного падения  $g$  по формуле

$$g = \frac{A \cdot M}{m}. \quad (2.32)$$

Расстояния  $S_p$  и  $S_y$  измеряются по шкале, закрепленной на штанге, время  $t$  прохождения груза на участке  $S_p$  определяется по шкале миллисекундомера 7 (рис. 2.6). Миллисекундомер автоматически включается в момент снятия перегрузки и автоматически выключается при достижении нижней частью груза фотодатчика 8.

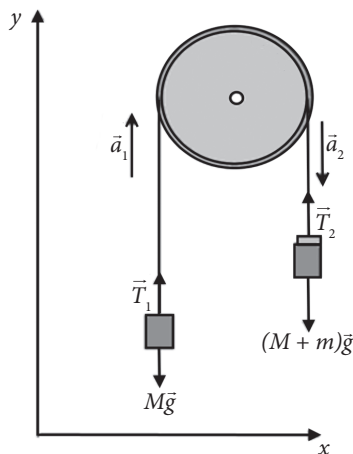


Рис. 2.7. Схематичное изображение сил для машины Атвуда

## Порядок выполнения работы и условия эксперимента

1. Подготовить лабораторную установку к работе.

2. Нажать кнопку «Сброс» на передней панели секундомера, при этом на цифровом табло устанавливается нулевой отсчет. Одновременно при нажатии этой кнопки включается электромагнит, тормозящий вращение диска и предотвращающий преждевременное движение грузов.

3. Перемещая нить вручную по пазам неподвижного диска (см. рис. 2.6), установить исходное положение грузов: груз 1 опирается о нижнюю платформу, груз 2 — в верхнем положении.

4. Платформу установить в положение, при котором  $S_p = S_y$ . Записать значение  $S_p$ .

5. Поместить на груз 2 один из перегрузков  $m_1$  (перегрузки выдаются преподавателем).

6. Приведя груз 2 в спокойное состояние, нажать кнопку «Пуск» на передней панели миллисекундомера. При этом диск 3 освобождается от электромагнитов и система приходит в движение.

7. После остановки грузов произвести отсчет времени движения  $t_1$ , груза 2 на участке  $S_p$ . Записать значение  $t_1$  в третью строку первого столбца табл. 2.4.

Таблица 2.4

Измерение времени движения груза массой  $M$  с массой перегрузка  $m$

$m$ , кг	$m_1$	$m_2$	$m_3$
$1/\sqrt{m}$ , кг <sup>-1/2</sup>			
$t$ , с	$t_1$		
	$t_2$		
	$t_3$		
$\bar{t}$ , с			

8. Не изменяя перегрузка  $m_1$ , произвести такие же измерения еще дважды. Полученные значения промежутков времени  $t_2$  и  $t_3$  занести в четвертую и пятую строки первого столбца табл. 2.4.

9. Аналогичные измерения произвести при двух других перегрузках с массами  $m_2$  и  $m_3$ . Данные занести во второй и третий столбец табл. 2.4.

### Обработка результатов эксперимента

1. Для каждого значения массы перегрузка  $m_i$  рассчитать величины  $1/\sqrt{m_i}$  и записать их в табл. 2.4.

2. Для каждого перегрузка  $m_i$  рассчитать по данным табл. 2.4 средние значения промежутков времени  $\bar{t}$ .

3. Для каждого из значений массы перегрузка  $m_i$  рассчитать разности  $t_i - \bar{t}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , среднеквадратичное отклонение  $\sigma_i$  и относительную погрешность  $\delta t$  измерения промежутков времени.

4. Построить график зависимости  $\bar{t}$  от  $1/\sqrt{m_i}$  и определить его наклон  $A$ .

5. По формуле (2.32) определить ускорение свободного падения  $g$ .

6. По полученным экспериментальным результатам и графикам сделать выводы.

### Контрольные вопросы и задания

1. Сформулируйте первый закон Ньютона. Какие системы отсчета называются инерциальными?

2. На каком участке движения систему отсчета, связанную с грузом 2 лабораторной установки (см. рис. 2.6), можно считать инерциальной?

3. Сформулируйте второй закон Ньютона.

4. Запишите уравнения движения на основе второго закона Ньютона для каждого груза лабораторной установки на участке равноускоренного движения.

5. Сформулируйте третий закон Ньютона. Приведите примеры выполнения третьего закона для сил, действующих на тела в лабораторной установке.

6. Выведите формулу для силы натяжения нити  $T$  при равноускоренном движении грузов на основе уравнений движения.

7. Покажите, что при очень малой массе перегрузка ( $m \ll M$ ) выполняется приближенное равенство  $T \approx Mg$ , а при  $m \rightarrow \infty$  ускорение грузов стремится к ускорению свободного падения.

8. Какова последовательность выполнения измерений для опытного определения ускорения свободного падения  $g$  в данной лабораторной работе?

9. Сформулируйте закон всемирного тяготения и условия его применимости.

10. Какие факторы влияют на величину ускорения свободного падения?

11. При каких условиях можно использовать модель материальной точки при описании гравитационного притяжения реальных макроскопических тел Землей?

## **2.4. Определение ускорения свободного падения с помощью математического маятника и физического (оборотного) маятника**

Все тела или совокупности тел, которые могут совершать периодические движения, или колебания, называются *колебательными системами*. В природе (и особенно в технике) чрезвычайно большую роль играют тела и устройства, которые способны совершать колебания без воздействия внешних периодических сил (т. е. колебания происходят за счет действия внутренних сил). Такие колебания называют *свободными колебаниями*. Маятником является всякое тело, подвешенное так, что его центр тяжести находится ниже точки подвеса. Протяженные тела различной формы и размеров, совер-

шающие колебания около точки подвеса или опоры, называют *физическими маятниками*. При отклонении от положения равновесия сила тяжести и упругие силы определяют в каждый момент времени угловое ускорение маятника, т. е. характер его движения (колебания). При этом уравнение колебаний имеет вид

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{mgL_0}{J}\varphi = 0, \quad (2.33)$$

где  $\varphi$  — угол отклонения оси маятника от положения равновесия;  $m$  — его масса;  $L_0$  — расстояние от точки подвеса до центра масс маятника;  $J$  — момент инерции маятника относительно оси вращения  $O$ ;  $g$  — ускорение свободного падения. Решением этого уравнения

является гармоническое колебание  $\varphi = A_0 \cos\left(\sqrt{\frac{mgL_0}{J}} t + \alpha\right)$  с периодом свободных колебаний  $T$ :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgL_0}}. \quad (2.34)$$

Из выражения (2.34) следует, что для нахождения ускорения свободного падения  $g$  с помощью физического маятника необходимо измерить период колебаний  $T$ , массу маятника  $m$ , расстояние  $L_0$  и момент инерции  $J$ . Период  $T$  и масса  $m$  измеряются с большой точностью; точность определения величин  $J$  и  $L_0$  обычно невелика. Достоинство рассматриваемого метода — возможность исключить величины  $J$  и  $L_0$  из расчетной формулы для  $g$ .

#### 2.4.1. Математический маятник

*Математический маятник* — это идеализированная система, состоящая из материальной точки (шарика), подвешенной на невесомой нерастяжимой нити. Реальный маятник приближается к идеальному математическому, если размеры шарика, закрепленного на тонкой жесткой нити, значительно меньше длины этой нити. В этом случае массой нити и деформацией груза можно

пренебречь, т. е. можно считать, что масса маятника сосредоточена в грузике, а упругие силы сосредоточены в нити, которую можно считать нерастяжимой.

На шарик, отклоненный на угол  $\varphi$ , действует возвращающая сила (рис. 2.8):  $F = -mg \sin \varphi$ . При малых углах отклонения  $\sin \varphi \approx \varphi$ , и силу  $F$  можно считать прямо пропорциональной отклонению от положения равновесия, т. е. квазиупругой:  $F = -mg\varphi$ . При этих условиях уравнение динамики вращательного движения шарика можно свести к виду

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{g}{l} \varphi = 0. \quad (2.35)$$

Уравнение (2.35) по форме аналогично общему уравнению гармонических колебаний

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 \cdot x = 0,$$

где  $\omega_0$  — собственная частота колебаний системы;  $x$  — отклонение шарика от положения равновесия. Отсюда можно заключить, что математический маятник при малых углах отклонения совершает гармонические колебания с частотой, равной

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}},$$

или периодом

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad (2.36)$$

где  $l$  — длина нити. Для математического маятника ускорение свободного падения  $g$  может быть получено из (2.36):

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}. \quad (2.37)$$



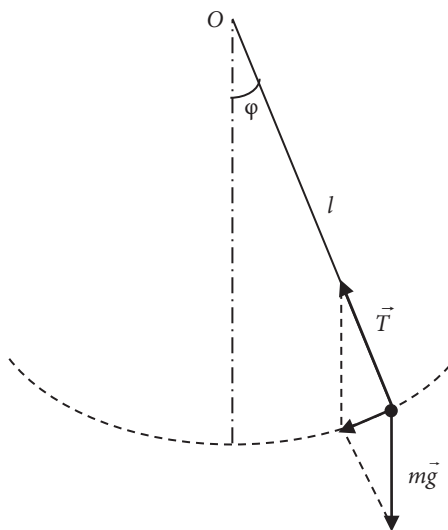


Рис. 2.8. Схематичное изображение математического маятника

### 2.4.2. Физический (оборотный) маятник

Оборотный маятник (рис. 2.9) состоит из стального стержня  $E$ , на котором укреплены опорные призмы  $A$  и  $C$ . Перемещая грузы  $B$  и  $D$ , можно менять период колебаний оборотного маятника. Во всяком физическом (оборотном) маятнике можно найти такие две точки, при закреплении маятника в которых период колебаний маятника остается неизменным.

При закреплении оборотного маятника призмами  $A$  и  $C$  (рис. 2.9) и при равенстве периодов его колебаний имеем

$$T_1 = T_2 = T = 2\pi \sqrt{\frac{J_1}{mga_1}} = 2\pi \sqrt{\frac{J_2}{mga_2}}, \quad (2.38)$$

где  $J_1$  и  $J_2$  — моменты инерции маятника относительно осей, проходящих через точки  $A$  и  $C$ ;  $a_1$  и  $a_2$  — расстояния от центра тяжести до соответствующих осей качания. На основании теоремы Штейнера

$$J_1 = J_0 + ma_1^2,$$

$$J_2 = J_0 + ma_2^2, \quad (2.39)$$

где  $J_0$  — момент инерции маятника относительно оси, проходящей через его центр тяжести и параллельной оси качания. Подставив (2.39) в (2.38) и исключив  $J_0$  и  $m$ , получим формулу для ускорения силы тяжести

$$g = \frac{4\pi^2(a_1 + a_2)}{T^2}. \quad (2.40)$$

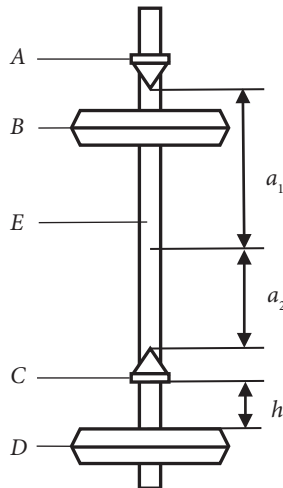


Рис. 2.9. Схематичное изображение физического (оборотного) маятника

Величина  $L = a_1 + a_2$  равна расстоянию между призмами и называется *приведенной длиной* физического маятника. Таким образом, для определения ускорения силы тяжести необходимо определить две величины — период колебаний  $T$  и приведенную длину  $L$  оборотного маятника.

## Лабораторная работа 6

### Измерение ускорения свободного падения с помощью математического маятника

Цель работы:

- изучить гармонические колебания;
- экспериментально исследовать зависимость периода колебаний математического маятника от его параметров;
- опытным путем определить ускорение свободного падения.

#### К р а т к а я   т е о р и я

Для опытного определения ускорения свободного падения  $g$  можно использовать соотношение (2.37). Действительно, если измерить период колебаний  $T$  при различных длинах нити  $l$ , а затем построить эту зависимость в переменных  $T^2$  и  $l$ , то получится прямая линия с коэффициентом наклона  $A = 4\pi^2/g$ . Определяя наклон  $A$  из экспериментального графика  $T^2(l)$ , можно рассчитать величину  $g$  по формуле

$$g = \frac{4\pi^2}{A}. \quad (2.41)$$

#### М е т о д и к а   э к с п е р и м е н т а

На рис. 2.10 изображена установка для определения ускорения свободного падения с помощью математического маятника. Металлический шарик подвешен на двух нитях для стабилизации плоскости колебаний.

Длина нитей  $l$  может регулироваться винтом 3 и измеряется по шкале, находящейся на стойке. Установка снабжена фотодатчиком, фиксирующим прохождение шариком положения равновесия.

Фотодатчик можно передвигать вдоль стойки при помощи винта 7. Сигналы с фотодатчика поступают на цифровой миллисекундомер, две шкалы которого показывают полное время колебаний  $t$  с момента их запуска и число полных периодов колебаний  $n$ . Горизонтальное положение установки обеспечивается регулировкой винтов 9.

### Порядок выполнения работы и условия эксперимента

1. Установить максимальную длину нитей маятника  $l_1$ , пользуясь регулировочным винтом 3. Значение  $l_1$ , измеренное по шкале, занести в табл. 2.5.
2. Пользуясь винтами 3 и 9, отрегулировать относительное положение шарика и платформы фотодатчика так, чтобы центр шарика пересекал световой луч, не задевая самой платформы.
3. Включить миллисекундомер в сеть (выполняет преподаватель).

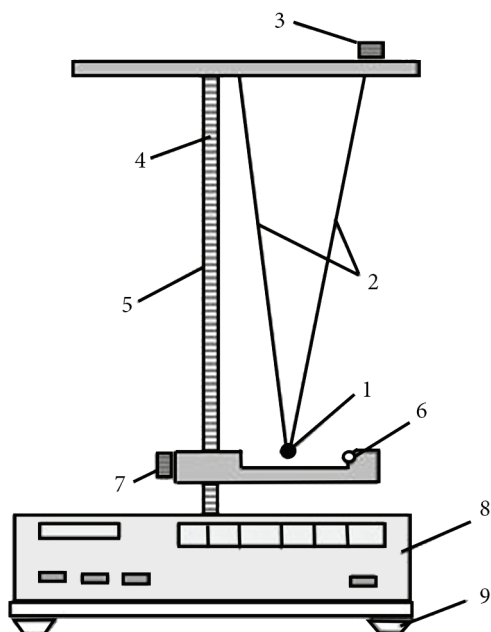


Рис. 2.10. Экспериментальная установка для определения ускорения свободного падения с помощью математического маятника:

- 1 — металлический шарик; 2 — нити; 3 — винт;  
4 — шкала; 5 — стойка; 6 — фотодатчик; 7 — винт;  
8 — цифровой миллисекундомер; 9 — винты

4. Отклонив шарик от положения равновесия на небольшой угол (в пределах 10 градусов), привести его в состояние свободных колебаний.

5. Не останавливая шарика, нажать кнопку «Сброс» на передней панели миллисекундомера. При этом на цифровом индикаторе устанавливается нулевой отсчет. Одновременно после пересечения шариком светового луча начинается отсчет текущего времени  $t$  и количества периодов колебаний  $n$ .

6. После того как шкала периодов миллисекундомера отсчитает  $n = 10$  периодов колебаний, произвести отсчет полного времени колебаний  $t_1$  по другой шкале прибора. Полученное значение  $t_1$  занести во вторую строку второго столбца табл. 2.5.

7. Не меняя длины маятника, повторить те же измерения еще дважды. Полученные значения  $t_2$  и  $t_3$  также занести в таблицу (в третью и четвертую строки первого столбца табл. 2.5).

8. Аналогичные измерения произвести при четырех других длинах нитей маятника  $l_2 - l_5$  (при этом каждый раз необходимо регулировать относительное положение шарика и фотодатчика при помощи винта 7). Полученные данные занести в табл. 2.5 (со второго по пятый столбец).

Таблица 2.5

Определение периода колебаний математического маятника  
в зависимости от длины нити

$l, \text{ м}$	$l_1$	$l_2$	$l_3$	$l_4$	$l_5$
$t, \text{ с}$	$t_1$				
	$t_2$				
	$t_3$				
$\bar{t}, \text{ с}$					
$T, \text{ с}$					
$T^2, \text{ с}^2$					

## Обработка результатов эксперимента

1. По данным табл. 2.5 рассчитать средние значения промежутков времени  $\bar{t}$  при различных длинах нитей маятника  $l$ .
2. Рассчитать значения периодов колебаний  $T = \bar{t}/n$  и соответствующие квадраты этих величин  $T^2$ . Данные занести в табл. 2.5.
3. Для всех значений  $l$  определить разности  $\rho_i = t_i - \bar{t}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , среднеквадратичное отклонение  $\sigma_i$  и относительную погрешность  $\delta t$  измерения отсчетов времени  $t$ .
4. Построить график зависимости  $T^2$  от  $l$ . Определить коэффициент  $A$ .
5. По формуле (2.41) определить величину ускорения свободного падения  $g$ .
6. На основании полученных экспериментальных результатов и графика сделать выводы.

## Контрольные вопросы

1. Чем отличается колебательное движение от других форм механического движения? При каких условиях возможны свободные колебания в системе?
2. Какой вид имеет уравнение движения для свободных гармонических колебаний? Что такое квазиупругая сила?
3. Как записать общее решение уравнения гармонических колебаний? Поясните смысл основных характеристик гармонических колебаний.
4. Постройте на одном графике зависимости смещения, скорости и ускорения от времени для гармонических колебаний (начальную фазу считать равной  $\pi/2$ , амплитуду принять равной единице).
5. При каких условиях реальный маятник, шарик на нити, можно считать приближенно математическим? Можно ли считать силу, действующую на шарик, квазиупругой?
6. Объясните суть метода определения ускорения свободного падения, принятого в данной лабораторной работе.

## Лабораторная работа 7

### **Определение ускорения свободного падения с помощью математического и физического маятников**

Цель работы — определить ускорение свободного падения с помощью физического (оборотного) и математического маятников.

#### Методика эксперимента

Для математического маятника ускорение свободного падения  $g$  может быть определено с помощью измерения периода колебаний маятника и длины нити и вычислено по формуле (2.37).

Для определения ускорения силы тяжести с помощью оборотного маятника необходимо определить две величины — период колебаний  $T$  и приведенную длину  $L$  ( $L = a_1 + a_2$ ) физического маятника, измерить которую можно перераспределением масс маятника. Тогда ускорение силы тяжести может быть определено по формуле (2.40).

Схема экспериментальной установки для определения ускорения свободного падения с помощью маятников представлена на рис. 2.11.

Вертикальная стойка выполнена из металлической трубы, на которую нанесена миллиметровая шкала.

*Математический маятник* имеет бифилярный подвес, выполненный из капроновой нити, на которой подвешен груз в виде металлического шарика, и устройство для изменения длины подвеса маятника.

*Физический (оборотный) маятник* имеет жесткий металлический стержень с рисками через каждые 10 мм для отсчета длины, две призматические опоры, два груза с возможностью перемещения и фиксации по всей длине стержня.

Узлы подвески математического и физического (оборотного) маятников расположены на диаметрально противоположных сторонах кронштейна 3 относительно вертикальной стойки. Кронштейн 4 имеет зажим для крепления на вертикальной стойке. Установка работает от блока электронного ФМ 1/1.

## Порядок выполнения работы

### Измерение ускорения свободного падения с помощью математического маятника.

1. Произвести регулировку положения основания при помощи регулировочных опор, используя для визуального наблюдения в качестве отвеса математический маятник.

2. Снять физический (оборотный) маятник с верхнего кронштейна, установить нижний кронштейн с фотодатчиком в крайнее

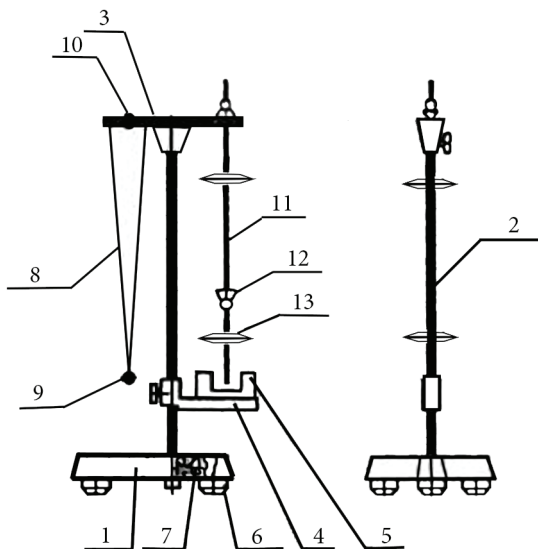


Рис. 2.11. Схема экспериментальной установки для определения ускорения свободного падения с помощью физического (оборотного) и математического маятников:

- 1 — основание установки; 2 — вертикальная стойка; 3 — верхний кронштейн для подвеса математического и физического (оборотного) маятника; 4 — кронштейн для установки фотодатчика; 5 — фотодатчик; 6 — три регулируемые опоры, размещенные на основании; 7 — зажим для фиксации вертикальной стойки; 8 — капроновая нить; 9 — металлический шарик; 10 — устройство для изменения длины подвеса маятника; 11 — жесткий металлический стержень с рисками через каждые 10 мм; 12 — призматические опоры; 13 — грузы



нижнее положение шкалы так, чтобы плоскость кронштейна, окрашенная в синий цвет, совпала с одной из рисок шкалы.

3. Установить верхний кронштейн таким образом, чтобы шарик математического маятника оказался в рабочей зоне фотодатчика. При помощи устройства 10 добиться такого положения шарика, при котором его центральная риска будет совпадать по высоте с риской на фотодатчике.

4. По шкале вертикальной стойки определить длину математического маятника  $l_1$ .

5. Нажать кнопку «Сеть» блока. При этом должно включиться табло индикации.

6. Отвести рукой шарик математического маятника на угол примерно 5–6 градусов и отпустить его.

7. Нажать кнопку «Пуск» на блоке и убедиться, что он регистрирует количество и время колебаний маятника. Нажать кнопку «Стоп» на блоке и убедиться, что отсчет времени и количества периодов колебаний прекращается в момент окончания очередного периода колебаний. Нажать кнопку «Сброс» на блоке.

8. Привести математический маятник в колебательное движение, отклонив металлический шарик на угол примерно 5–6 градусов, после чего нажать кнопку «Пуск» на блоке.

9. По показанию таймера определить значение времени 60–70 колебаний маятника, нажав кнопку «Стоп». Определить среднее значение периода колебаний маятника по формуле

$$T_1 = \frac{t_1}{n_1},$$

где  $t_1$  — время колебаний, с;  $n_1$  — число колебаний.

10. Передвинуть вверх кронштейн с фотодатчиком на 20 мм. При помощи устройства 10 добиться такого положения шарика, при котором его центральная риска будет совпадать по высоте с риской на фотодатчике.

11. По шкале вертикальной стойки определить длину математического маятника  $l_2$ .

12. Повторить эксперимент (см. пп. 5–9).

13. Определить  $T_2$  по формуле  $T_2 = t_2/n_2$ .

14. Вычислить ускорение свободного падения по формуле

$$g = \frac{4\pi^2(l_1 - l_2)}{T_1^2 - T_2^2}.$$

15. Оценить погрешности косвенных измерений ускорения свободного падения по формуле

$$\frac{\Delta g}{g} = \pm \sqrt{\frac{(\Delta l_1)^2 + (\Delta l_2)^2}{(l_1 - l_2)^2} + 4 \cdot \frac{(T_1 \Delta T_1)^2 + (T_2 \Delta T_2)^2}{(T_1^2 - T_2^2)^2}}.$$

### **Измерение ускорения свободного падения с помощью оборотного маятника.**

1. Укрепить призматическую опору (рис. 2.11) на расстоянии около 120 мм от конца стержня физического (оборотного) маятника и два груза в положениях, обозначенных на рисунке. По шкале, нанесенной на стержне, найти расстояние между призмами  $L = a_1 + a_2$ .

2. Подвесить оборотный маятник на одной из призматических опор, например, А. Повернуть верхний кронштейн на  $180^\circ$  так, чтобы стержень маятника находился в рабочей зоне фотодатчика.

3. Нажать кнопку «Сброс» на блоке. Отклонив маятник на угол примерно 5–6 градусов, нажать кнопку «Пуск» на блоке и без толчка отпустить маятник. По показанию таймера определить значение времени 20–30 колебаний маятника. Определить среднее значение периода колебаний маятника по формуле  $T = t/n$ .

4. Для различных положений  $h$  груза D (см. рис. 2.9) на стержне оборотного маятника E рассчитать периоды колебаний маятника  $T_i$  в соответствии с п. 3. При этом положение груза B остается неизменным.

5. Повернуть маятник и подвесить его на другой призматической опоре С.

6. Определить периоды колебаний обратного маятника для различных положений груза  $D$  на стержне  $E$  в тех же пределах и с тем же числом измерений.

7. По данным таблицы построить на миллиметровой бумаге графики зависимостей периодов  $T_1$  и  $T_2$  от положения груза  $D$  на стержне. Точка пересечения кривых определит местонахождение подвижного груза  $D$ , при котором значения периодов будут равны ( $T_1 = T_2 = T$ ).

8. Для этого положения груза  $D$  найти период колебаний маятника относительно призм  $A$  и  $C$ . Полученные данные занести в таблицу.

9. Рассчитать ускорение свободного падения по формуле

$$g = \frac{4\pi^2(a_1 + a_2)}{T^2}.$$

10. Оценить погрешности косвенных измерений ускорения свободного падения по формуле

$$\frac{\Delta g}{g} = \pm \sqrt{\left(\frac{\Delta L}{L}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{\Delta T}{T}\right)^2}.$$

11. Сравнить полученные результаты и погрешности их измерения для двух способов определения ускорения свободного падения.

### Контрольные вопросы и задания

1. Что называется ускорением свободного падения? Как оно направлено?

2. От чего зависит ускорение свободного падения?

3. Что такое свободное падение тел?

4. Дайте определение физического (обратного) маятника.

5. Выведите формулу для периода колебаний физического (обратного) маятника.

6. Дайте определение приведенной длины физического (оборотного) маятника.
7. Дайте определение момента инерции тела.
8. Запишите выражение для момента инерции обруча, диска и стержня относительно центра масс.
9. Сформулируйте теорему Штейнера.
10. Выведите основное уравнение динамики вращательного движения.
11. Дайте определение математического маятника.

## Лабораторная работа 8

### **Определение гравитационной постоянной с помощью гравитационного торсионного балансира (весов) Кавендиша**

Цель работы:

- исследовать затухающие колебания у точки равновесия торсионного балансира (весов) Кавендиша как функцию времени;
- определить гравитационную постоянную  $G$  методом максимальных отклонений;
- определить гравитационную постоянную  $G$  методом ускорения.

#### Краткая теория и методика эксперимента

Основу торсионного балансира (весов Кавендиша) составляет легкая поперечная планка с маленьким свинцовым шариком массой  $m_2$  на каждом конце на расстоянии  $d$  от точки подвеса, подвешенная на тонкой упругой струне (рис. 2.12, а). На эти шарики действуют два больших свинцовых шара массой  $m_1$ . Несмотря на то что сила взаимодействия шариков очень мала (меньше  $10^{-9}$  Н), это взаимодействие можно наблюдать с помощью очень чувствительного гравитационного торсионного балансира. Движение маленьких шариков наблюдается с помощью светового указателя (рис. 2.12, б). Световое пятно создается освещенным вогнутым зеркалом, закрепленным на поперечной планке торсионного маятника. Используя данные о движении тел массой  $m_1$  и геометрии установки, можно определить гравитационную постоянную, используя два метода: 1) метод максимального отклонения и 2) метод ускорения. Подробно о движении торсионного маятника см. в гл. 6.

**Метод максимального отклонения.** Сила гравитационного взаимодействия между двумя шарами массами  $m_1$  и  $m_2$ , находящимися на расстоянии  $b$ , равна

$$F = G \frac{m_1 m_2}{b^2}, \quad (2.42)$$

где  $G$  — гравитационная постоянная.

Когда два больших шара находятся в положении I (рис. 2.12, б), момент силы притяжения, приложенной к маятнику, равен

$$M_I = 2Fd = 2G \frac{m_1 m_2}{b^2} d, \quad (2.43)$$

где  $d$  — расстояние от центра масс маленького шара до точки подвеса.

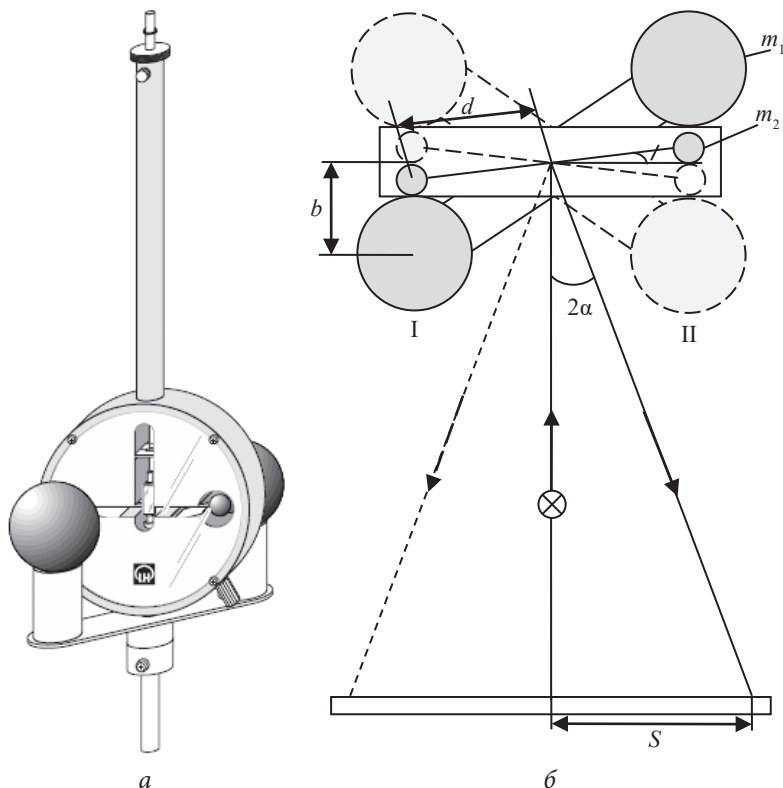


Рис. 2.12. Весы Кавендиша (а). Схема светового указателя (б)

Момент сил притяжения  $M_I$  компенсируется моментом кручения струны  $M = D\alpha$ , где  $D$  — постоянная величина для струны, называемая модулем кручения (см. (6.24)). Таким образом, маятник придет к равновесию в положении с углом поворота  $\alpha_I$ . Поворачивая большие шары в положение II, силы симметрично инвертируются. Момент сил соответственно становится  $M_{II} = -M_I$ . Маятник совершает затухающие колебания около равновесного положения с углом поворота  $\alpha_{II}$ . Разность моментов составляет

$$M_I - M_{II} = 2M_I = D(\alpha_I - \alpha_{II}). \quad (2.44)$$

Величина углового отклонения может быть определена из периода колебаний  $T$  и момента инерции  $J$  торсионного маятника (см. параграф 6.5):

$$D = J \frac{4\pi^2}{T^2}. \quad (2.45)$$

Момент инерции равен моменту инерции двух маленьких шариков:

$$J = 2m_2 d^2. \quad (2.46)$$

Согласно (2.46) равенство (2.45) преобразуется:

$$D = m_2 d^2 \frac{8\pi^2}{T^2}. \quad (2.47)$$

Подставляя в (2.44) выражения (2.43) и (2.47), получаем

$$G = \frac{b^2 d}{m_1} \frac{2\pi^2}{T^2} (\alpha_I - \alpha_{II}). \quad (2.48)$$

На рис. 2.12, б косвенно отражено измерение угла вращения с использованием светового указателя: луч света указателя перпендикулярен неотклоненному положению маятника (равновесное положение, когда большие шары убраны). Положение светового пятна

в неотклоненном состоянии совпадает с нулевой точкой на шкале. Соответственное значение тангенса угла

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{S}{L_0}, \quad (2.49)$$

где  $\alpha$  — угол поворота;  $S$  — положение пятна;  $L_0$  — расстояние от шкалы до маятника.

Поскольку угол  $\alpha$  очень мал, то выражение (2.49) можно записать как

$$\alpha = \frac{S}{2L_0}. \quad (2.50)$$

Вогнутое зеркало освещено под горизонтальным углом  $\beta$  (рис. 2.13). Световой указатель  $O$  в неотклоненном состоянии маятника находится на расстоянии  $L_1$  от соответствующей точки  $N$  нормали и расстоянии  $L = \sqrt{L_0^2 + L_1^2}$  от вогнутого зеркала.

Для поворота маятника на угол  $\alpha$  относительно начальной точки можно записать соотношения  $S' = L \cdot \operatorname{tg} 2\alpha$  и

$$\frac{S'}{S} = \frac{\sin(90^\circ - \beta + 2\alpha)}{\sin(90^\circ + \alpha)} = \cos \beta - \operatorname{tg} 2\alpha \sin \beta. \quad \text{В каждом случае угол } \alpha$$

очень мал (не более  $1.58^\circ$ ), размеры балансира не позволяют получать углы освещения больше  $30^\circ$ , тогда можно пренебречь вторым слагаемым и записать  $S'/S = \cos \beta = L_0/L$ . Подставляя сюда выражения для  $S'$  и  $L$  и учитывая, что для малых углов  $\operatorname{tg} 2\alpha = 2\alpha$ , получаем

$$\alpha = \frac{S}{2} \frac{L_0}{L_0^2 + L_1^2}. \quad (2.51)$$

В случае  $\beta = 0^\circ$ ,  $L_1 = 0$  выражение (2.51) дает (2.50). Выражение (2.51) также верно, когда луч отклоняется вверх или вниз.

Неотклоненное положение торсионного маятника (точка  $O$  на рис. 2.13) невозможно определить до проведения эксперимента. Тогда для определения  $L_1$  измеряется расстояние между точкой  $N$



и приблизительным положением светового пятна в точке равновесия I. Приближение возможно, так как  $\alpha \ll 1$ . Если зеркало не освещено под очень большим углом, т. е.  $\beta \ll 1$ , то можно принять  $L_1 = 0$ .

Из уравнений (2.48) и (2.51) мы получаем выражение для определения гравитационной постоянной:

$$G = \pi^2 \frac{b^2 d}{m_1} \frac{S_I - S_{II}}{T^2} \frac{L_0}{L_0^2 + L_1^2}, \quad (2.52)$$

где  $T$  — период колебаний торсионного маятника;  $S_I$  и  $S_{II}$  — расстояние между двумя положениями светового пятна для положений равновесия  $\alpha_I$  и  $\alpha_{II}$ ; величины  $m_1 = 1.5$  кг,  $d = 50$  мм и  $b = 47$  мм постоянные для этой установки.

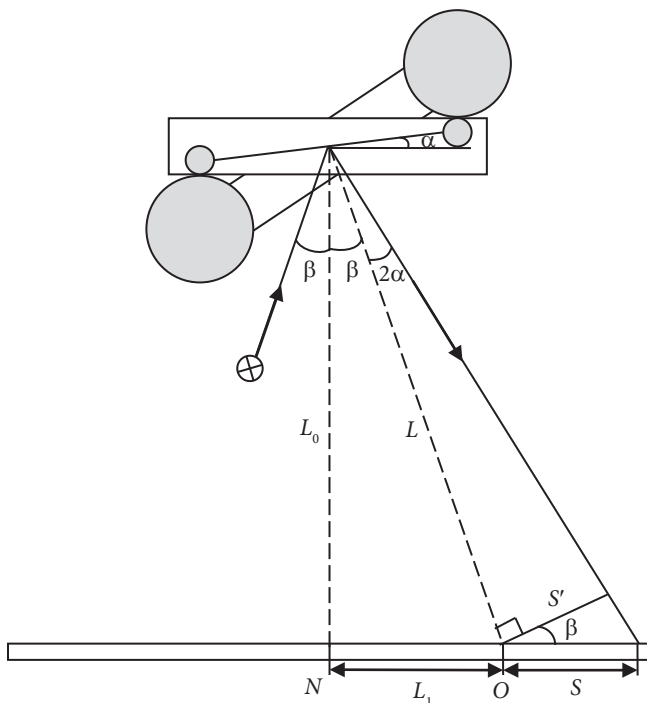


Рис. 2.13. Диаграмма отклонения со световым указателем

Вместе с моментом, обусловленным силой взаимодействия  $F$  с ближним свинцовым шаром (на расстоянии  $b$ ), сила взаимодействия  $F_2$  с удаленным шаром (на расстоянии  $d'$ ) создает противоположный момент (рис. 2.14). Таким образом, для получения более точного выражения для  $G$ , нежели (2.52), в формуле для момента сил (2.43) необходимо учесть момент силы  $F_2$ :  $M_1 = 2(F + F_2^\perp)d$ , где  $F_2^\perp = -F_2(b/d')$  есть компонента силы  $F_2$ , действующая перпендикулярно поперечной перекладине. Силы  $F$  и  $F_2$  связаны между собой соотношением  $F_2 = F(b^2/d'^2)$ . Гравитационная постоянная  $G$ , таким образом, больше сосчитанной по формуле (2.52) на поправку:

$$K = \frac{F}{F + F_2^\perp} = \frac{1}{b^3 \left(1 - \frac{d'^3}{b^3}\right)}, \quad (2.53)$$

где  $d' = \sqrt{(2d)^2 + b^2}$ .

Тогда числовое значение  $K = 1,083$ .

**Метод ускорения.** В этом методе измеряется ускорение маленьких шариков под действием силы притяжения больших, строится зависимость координаты шариков как функция времени. Перемене-

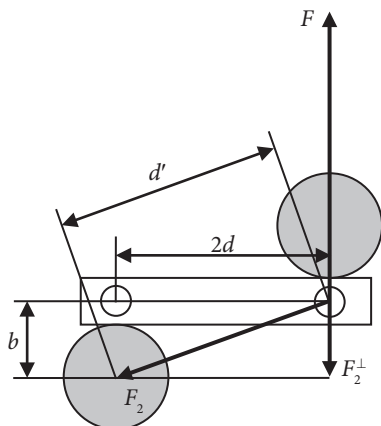


Рис. 2.14. К расчету влияния «удаленного» шара

чение шариков определяется отклонением луча лазера по линейке как функция времени с помощью секундомера. Непосредственно после перемещения больших шаров из положения I в II скрученный стержень создает скручивающий момент  $M_p$ , приложенный к продольной перекладине так, что общий момент, приложенный к перекладине, равен  $2M_{II}$ . Это задает угловое ускорение  $\ddot{\alpha} = 2M_{II}/J$ , которое можно считать постоянным в первые несколько минут. Следовательно, можно записать

$$\alpha = \alpha_1 + \frac{M_{II}}{J} t^2. \quad (2.54)$$

Из уравнений (2.43), (2.46), (2.48) и (2.54) можно получить

$$G = \frac{b^2 d}{m_1} \frac{\alpha - \alpha_1}{t^2} \text{ и затем, используя (2.51),}$$

$$G = \frac{b^2 d}{2m_1} \frac{S - S_1}{t^2} \frac{L_0}{L_0^2 + L_1^2} = \frac{b^2 d}{2m_1} a \frac{L_0}{L_0^2 + L_1^2}, \quad (2.55)$$

$$\text{где } a = \frac{S - S_1}{t^2}.$$

Таким образом, при использовании метода ускорения разница  $S - S_1$  положений светового пятна измеряется как функция времени  $t$  и геометрии установки.

На рис. 2.15 показана схема экспериментальной установки для определения гравитационной постоянной с помощью весов Кавендиша. Весы Кавендиша установлены у стены на кронштейне, гелий-неоновый лазер находится на расстоянии 35 см от весов.

## Порядок выполнения работы и условия эксперимента

### Метод максимального отклонения.

1. Не менее 5 раз измерить расстояние от маятника до стены  $L_0$  (см. рис. 2.13).

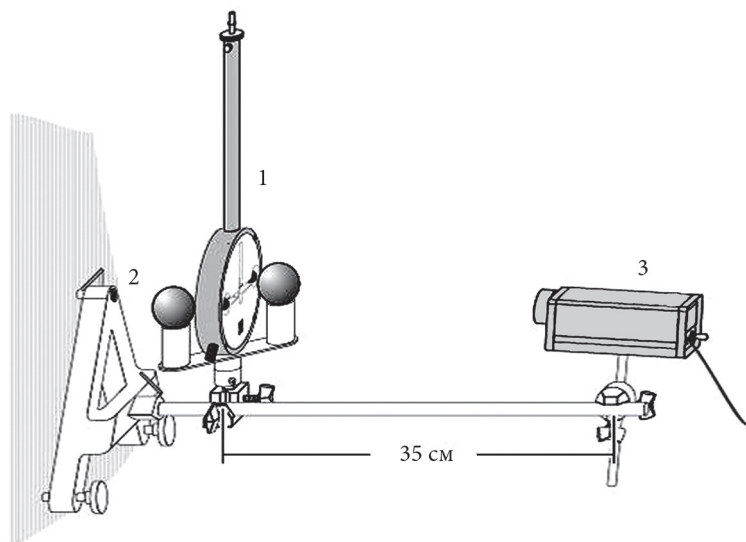


Рис. 2.15. Схема экспериментальной установки:  
1 — весы Кавендиша; 2 — кронштейн; 3 — гелий-неоновый лазер

2. Не менее 5 раз измерить расстояние от точки  $N$  до положения  $S_1$  маятника до стены  $L_1$  (рис. 2.13).

3. Подождать, пока система придет в равновесие, затем измерить величину  $S_1$  не менее 5 раз.

4. Быстро и аккуратно отодвинуть большие шары из положения I в II и запустить секундомер.

5. Записать положение светового пятна по шкале через каждые 20 с для трех периодов колебаний в течение 40 мин. Данные измерения занести в табл. 2.6.

### Метод ускорения.

1. Не менее 5 раз измерить расстояние от маятника до стены  $L_0$  (рис. 2.13).

2. Не менее 5 раз измерить расстояние от точки  $N$  до положения  $S_1$  маятника до стены  $L_1$  (рис. 2.13).

3. Подождать, пока система придет в равновесие, измерить расстояние  $S_1$ .

Таблица 2.6

Положение светового пятна  $S$  после отведения больших шаров  
в положение II для трех периодов колебаний

№ п/п	$t$ , с	$S$ , мм
1	0	
2	20	
3	40	
...	...	
120	2400	

4. Быстро и аккуратно отвести большие шары из положения I в положение II и включить секундомер.

5. Записать положение светового пятна  $S$  на шкале через каждые 5 с в первую минуту после отведения больших шаров в положение II. Данные занести в табл. 2.7.

Таблица 2.7

Положение пятна  $S$  в первую минуту  
после отведения больших шаров в положение II

$t$ , с	$S$ , мм	$t^2$ , с <sup>2</sup>	$S_1 - S$ , мм
0			
5			
10			
...			
60			

6. Вычислить разницу между начальным положением пятна  $S_1$  и положением пятна в первую минуту после отведения больших шаров в положение II  $S$ . Данные занести в табл. 2.7.

## Обработка результатов измерения

### Метод максимального отклонения.

1. Вычислить случайную, систематическую и полную погрешность определения  $L_0$ ,  $L_1$ ,  $S_1$ .

2. Построить график зависимости положения светового пятна  $S$  от времени  $t$ . Примерный график такой зависимости приведен на рис. 2.16.

3. По графику для трех периодов определить средний период колебаний  $T$ .

4. Рассчитать систематическую погрешность определения  $T$ .

5. По графику определить пять максимальных отклонений светового пятна  $S_{\max}$ . Данные занести в табл. 2.8.

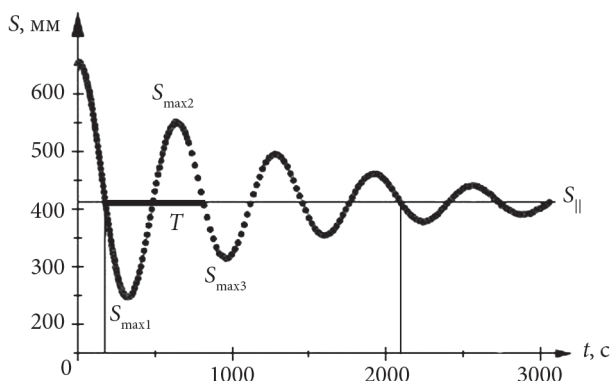


Рис. 2.16. График зависимости положения светового пятна  $S$  от времени  $t$

Таблица 2.8

Максимальное смещение  $S_{\max}$  светового пятна после отвода больших шаров в положение II

№ п/п	$S_{\max}$ , мм
1	
2	
3	
4	
5	

6. Используя первые пять максимальных отклонений  $S_{\max}$ , рассчитать положение равновесия  $S_{\Pi}$  по формуле

$$S_{\Pi} = \frac{1}{2} \left( \frac{S_{\max 1} + S_{\max 3} + S_{\max 5}}{3} + \frac{S_{\max 2} + S_{\max 4}}{2} \right).$$

7. За полную погрешность определения  $S_{\Pi}$  принять систематическую погрешность измерения положения светового пятна  $S$ .

8. По формуле (2.52) вычислить значение гравитационной постоянной. Значение констант для данной работы:  $m_1 = 1,5$  кг,  $d = 50$  мм,  $b = 47$  мм, поправка  $K = 1,083$ .

9. Определить значение гравитационной постоянной  $G$  с учетом поправки  $K$ .

10. Вычислить погрешность определения гравитационной постоянной  $\Delta G$  по формуле

$$\frac{\Delta G}{G} = \sqrt{\left( \frac{\Delta S_I}{S_I - S_{\Pi}} \right)^2 + \left( \frac{\Delta S_{\Pi}}{S_I - S_{\Pi}} \right)^2 + \left( \frac{\Delta T}{T} \right)^2 + 4 \left( \frac{L_1 \Delta L_1}{L_0^2 + L_1^2} \right)^2 + \left( \frac{(L_1^2 - L_0^2) \Delta L_0}{(L_1^2 + L_0^2) L_0} \right)^2}.$$

11. Сравнить полученное значение  $G$  с табличным значением.

### **Метод ускорения.**

1. Вычислить случайную, систематическую и полную погрешность определения  $L_0$  и  $L_1$ .

2. По данным табл. 2.7 построить график зависимости положения светового пятна  $S_1 - S$  от квадрата времени  $t^2$ .

3. Методом наименьших квадратов опередить тангенс угла наклона зависимости  $S_1 - S(t^2)$  по формуле

$$a = \frac{n \sum_{i=1}^n (S_1 - S)_i t_i^2 - \sum_{i=1}^n (S_1 - S)_i \sum_{i=1}^n t_i^2}{n \sum_{i=1}^n (t_i^2)^2 - \left( \sum_{i=1}^n t_i^2 \right)^2},$$

где  $n$  — количество точек на графике.

4. Рассчитать погрешность определения  $a$  по формуле

$$\Delta a = t_{n-2} \sqrt{\frac{n \sum_{i=1}^n (S_i - S_i - at_i^2)^2}{(n-2) \left( n \sum_{i=1}^n (t_i^2)^2 - \left( \sum_{i=1}^n t_i^2 \right)^2 \right)}}$$

где  $t_{n-2}$  — коэффициент Стьюдента для числа измерений на два меньшего, чем точек на графике.

5. По формуле (2.55) вычислить значение гравитационной постоянной. Значение констант для данной работы:  $m_1 = 1,5$  кг,  $d = 50$  мм,  $b = 47$  мм, поправка  $K = 1,083$ .

6. Определить значение гравитационной постоянной  $G$  с учетом поправки  $K$ .

7. Вычислить погрешность определения гравитационной постоянной  $\Delta G$  по формуле

$$\frac{\Delta G}{G} = \sqrt{\left( \frac{\Delta a}{a} \right)^2 + 4 \left( \frac{L_1 \Delta L_1}{L_0^2 + L_1^2} \right)^2 + \left( \frac{(L_1^2 - L_0^2) \Delta L_0}{(L_1^2 + L_0^2) L_0} \right)^2}.$$

8. Сравнить полученное значение  $G$  с табличным значением.

### Контрольные вопросы и задания

1. Сформулируйте закон всемирного тяготения Ньютона.
2. Каковы физический смысл, значение и размерность гравитационной постоянной?
3. В чем заключается сущность эксперимента Кавендиша?
4. Опишите метод максимального отклонения, используемый в работе для определения гравитационной постоянной.
5. Опишите метод ускорения, используемый в работе для определения гравитационной постоянной.



### 3. ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДЫХ ТЕЛ. МОМЕНТ ИНЕРЦИИ

#### 3.1. Способы описания вращательного движения

Всякое движение твердого тела можно представить как суперпозицию двух видов движения — поступательного и вращательного. При поступательном движении все точки твердого тела движутся по одинаковым траекториям, скорости этих точек в любой момент времени одинаковы. Любая прямая, проведенная через две произвольные точки твердого тела, при поступательном движении остается параллельной самой себе. Очевидно, что поступательное движение твердого тела полностью характеризуется движением какой-либо одной точки тела. Обычно в качестве такой точки выбирается центр масс. Положение точки задается с помощью радиус-вектора  $\vec{r}$ .

Движение  $i$ -й материальной точки описывается с помощью кинематических характеристик: перемещения  $\Delta\vec{r}_i$ , скорости  $\vec{v}_i$  и ускорения  $\vec{a}_i$ , которые связаны между собой соотношениями

$$\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt}, \quad \vec{a}_i = \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2}. \quad (3.1)$$

Если известны значения координат и скоростей всех частиц системы в некоторый начальный момент времени, то кинематические характеристики всех материальных точек в любой момент времени определяются из решения системы кинематических и динамических уравнений движения:

$$m_i \vec{a}_i = m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_i. \quad (3.2)$$

В этом уравнении использованы так называемые динамические величины: масса материальной точки  $m_i$ , результирующая сила  $\vec{F}_i$ , которая включает внешние силы и силы взаимодействия рассматриваемой  $i$ -й частицы со всеми другими частицами системы, а также импульс  $\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$ .

При вращательном движении абсолютно твердого тела, т. е. не изменяющего объем и размеры, все его точки движутся по окружностям, центры которых лежат на одной и той же прямой, называемой осью вращения. Очевидно, что при вращательном движении твердого тела его точки совершают различные перемещения и имеют различные скорости, т. е. вращательное движение невозможно характеризовать движением одной точки твердого тела. Однако тот факт, что траектории всех точек лежат в параллельных плоскостях (так называемое плоское движение), перпендикулярных оси вращения, позволяет полностью определять вращательное движение твердого тела вокруг неподвижной оси через движение одного из сечений в какой-либо из параллельных плоскостей.

Для описания вращательного движения удобно ввести новые кинематические псевдовекторные величины — элементарное угловое перемещение  $d\vec{\varphi}_i$ , угловую скорость  $\vec{\omega}_i$  и угловое ускорение  $\vec{\varepsilon}_i$ , которые связаны между собой следующим образом:

$$\vec{\omega}_i = \frac{d\vec{\varphi}_i}{dt}, \quad \vec{\varepsilon}_i = \frac{d\vec{\omega}_i}{dt} = \frac{d^2\vec{\varphi}_i}{dt^2}. \quad (3.3)$$

Поскольку все точки плоскости абсолютно твердого тела, перпендикулярной оси вращения, за один и тот же промежуток времени совершают одинаковые угловые перемещения, то, в соответствии с формулами (3.3), они характеризуются и одинаковыми значениями угловых скоростей и угловых ускорений. По определению вектор элементарного углового перемещения  $d\vec{\phi}$  перпендикулярен плоскости вращения, т.е. лежит на оси вращения. Его направление определяется правилом правого винта. Очевидно, что так же направлен и вектор угловой скорости  $\vec{\omega}$ . Линейная скорость  $\vec{v}_i$  и угловая скорость  $\vec{\omega}$  связаны соотношением

$$\vec{v}_i = [\vec{\omega}, \vec{r}_i]. \quad (3.4)$$

В выражении (3.4) квадратными скобками обозначено векторное произведение векторов  $\vec{\omega}$  и  $\vec{r}_i$ .

Запись (3.4) означает, что вектор  $\vec{v}_i$  направлен перпендикулярно плоскости, в которой лежат векторы  $\vec{\omega}$  и  $\vec{r}_i$ , а модуль вектора  $\vec{v}_i$  определяется выражением  $|\vec{v}_i| = v_i = \omega \cdot r_i \cdot \sin \alpha_i$ , где  $\alpha_i$  — угол между  $\vec{\omega}$  и  $\vec{r}_i$  (рис. 3.1). Из рисунка видно, что  $r_i \cdot \sin \alpha_i = R_i$ , где величина  $R_i$  есть расстояние от материальной точки до оси вращения. Таким образом,

$$|\vec{v}_i| = v_i = \omega \cdot R_i. \quad (3.5)$$

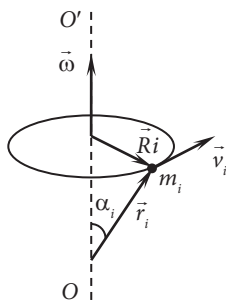


Рис. 3.1. Вращательное движение  $i$ -й точки твердого тела вокруг неподвижной оси  $OO'$

При описании динамики вращательного движения важную роль играет так называемое уравнение моментов, которое для материальной точки является следствием второго закона Ньютона. В этом уравнении используются новые динамические величины — момент импульса материальной точки  $\vec{L}_i$  и момент силы, действующий на материальную точку  $\vec{M}_i$ .

Пусть положение некоторой  $i$ -й материальной точки относительно начала отсчета, задается радиус-вектором  $\vec{r}_i$ . Эта точка имеет импульс  $\vec{p}_i$ . Тогда моментом импульса данной материальной точки относительно начала отсчета называется вектор, определяемый по формуле

$$\vec{L}_i = [\vec{r}_i, \vec{p}_i], \quad (3.6)$$

а моментом действующей на нее силы  $\vec{F}_i$  относительно начала отсчета называется вектор, определяемый формулой

$$\vec{M}_i = [\vec{r}_i, \vec{F}_i]. \quad (3.7)$$

Для вывода уравнения моментов для материальной точки необходимо найти производную момента импульса по времени  $d\vec{L}_i/dt$ . Тогда с учетом выражения (3.6) получаем

$$\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \left[ \frac{d\vec{r}_i}{dt}, \vec{p}_i \right] + \left[ \vec{r}_i, \frac{d\vec{p}_i}{dt} \right]. \quad (3.8)$$

Вектор  $d\vec{r}_i/dt = \vec{v}_i$  совпадает по направлению с импульсом  $\vec{p}_i$ . Следовательно, первый член в правой части выражения (3.8) равен нулю. Второе слагаемое в правой части выражения (3.8) представляет собой момент сил, поскольку, в соответствии с уравнением (3.2),  $d\vec{p}_i/dt = \vec{F}_i$ . Таким образом, получаем

$$\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \vec{M}_i. \quad (3.9)$$

Это уравнение и называется *уравнением моментов для материальной точки*.

Движение системы материальных точек определяется уравнениями, аналогичными (3.2) и (3.9). Уравнение движения системы материальных точек является следствием второго и третьего законов Ньютона. Оно имеет следующий вид:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}. \quad (3.10)$$

В этом уравнении  $\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i$  — суммарный импульс системы материальных точек, а  $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$  — результирующая всех внешних

сил, действующих на систему точек (результатирующая всех внутренних сил равна нулю согласно третьему закону Ньютона).

Уравнение моментов для системы материальных точек также получается суммированием уравнений (3.9):

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}, \quad (3.11)$$

где  $\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i$  — суммарный момент импульса системы;  $\vec{M} = \sum_i \vec{M}_i$  —

суммарный момент внешних сил, действующих на все точки системы (легко показать, что суммарный момент всех внутренних сил равен нулю).

### 3.2. Момент инерции

Абсолютно твердое тело может рассматриваться как система материальных точек, расстояния между которыми остаются неизменными. Поэтому уравнения (3.10) и (3.11) применимы и для твердого тела в целом. Более того, можно доказать, что эти уравнения полностью определяют движение твердого тела в заданных внешних силовых полях, т. е. для твердого тела эта система уравнений является замкнутой.

Рассмотрим твердое тело, которое может вращаться вокруг неподвижной оси (рис. 3.2). Очевидно, что при таком вращении все материальные точки, образующие твердое тело, вращаются с одинаковой угловой скоростью  $\vec{\omega}$ . Точку отсчета возьмем на оси вращения и будем характеризовать положение материальных точек, образующих твердое тело, при помощи радиус-векторов  $\vec{r}_i$ , проведенных из этой точки.

Согласно выражению (3.6) момент импульса  $i$ -й частицы относительно точки  $O$  равен

$$\vec{L}_i = [\vec{r}_i, \vec{p}_i] = [\vec{r}_i, m_i \vec{v}_i] = m_i [\vec{r}_i, \vec{v}_i]. \quad (3.12)$$

Векторы  $\vec{r}_i$  и  $\vec{v}_i$  для всех точек взаимно перпендикулярны. Поэтому модуль вектора  $\vec{L}_i$  равен

$$|\vec{L}_i| = L_i = m_i r_i \omega R_i, \quad (3.13)$$

где  $R_i$  — расстояние от материальной точки до оси вращения (см. формулу (3.5)).

Таким образом, модуль вектора  $\vec{L}_i$  пропорционален скорости вращения, но направление вектора  $\vec{L}_i$  не зависит от угловой ско-

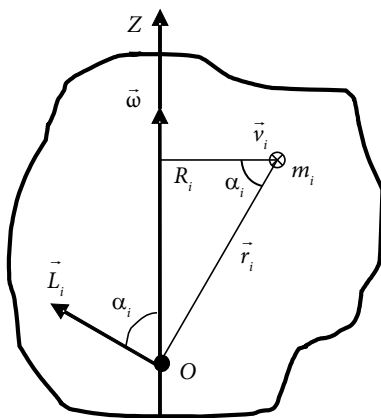


Рис. 3.2. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси  $OZ$  с угловой скоростью  $\vec{\omega}$

рости  $\vec{\omega}$ . Этот вектор лежит в плоскости, проходящей через ось вращения и материальную точку массой  $m_i$  и перпендикулярен к  $\vec{r}_i$ . Угол между векторами  $\vec{L}_i$  и  $\vec{\omega}$  является острым для всех материальных точек, образующих тело. Поэтому проекции всех векторов  $\vec{L}_i$  на ось  $OZ$ , совпадающую с осью вращения, имеют одинаковые знаки. Следовательно,

$$L_{zi} = L_i \cos \alpha_i = m_i r_i \omega_z R_i \cos \alpha_i = m_i (r_i \cos \alpha_i) R_i \omega_z = m_i R_i^2 \omega_z. \quad (3.14)$$

Следует отметить, что величина  $L_{zi}$  не зависит от выбора начала отсчета  $O$ , поэтому ее можно назвать моментом импульса  $i$ -й точки относительно оси вращения.

Просуммировав выражение (3.14) по всем точкам, получим момент импульса тела относительно оси  $OZ$ , совпадающей с осью вращения:

$$L_z = \sum_i L_{zi} = \omega_z \sum_i m_i R_i^2. \quad (3.15)$$

Величина  $J = \sum_i m_i R_i^2$  называется *моментом инерции тела* относительно данной оси. Выражение (3.15) теперь можно представить в виде

$$L_z = J \omega_z. \quad (3.16)$$

Полученная формула аналогична формуле  $p_z = mv_z$ . Аналогом массы при вращательном движении является момент инерции, линейной скорости — угловая скорость. Таким образом, если масса  $m$  характеризует инерционные свойства тела при его поступательном движении, то момент инерции  $J$  характеризует инерционные свойства тела при его вращательном движении вокруг данной оси.

Согласно выражению (3.11)

$$\left( \frac{d\vec{L}}{dt} \right)_z = \frac{d}{dt} L_z = \frac{d}{dt} (J \omega_z) = J \frac{d\omega_z}{dt} = J \varepsilon_z = M_z. \quad (3.17)$$

Уравнение  $J\epsilon_z = M_z$  называют уравнением динамики вращательного движения. Несложно показать, что величина  $M_z$  также не зависит от выбора начала отсчета  $O$  и ее можно назвать суммарным моментом внешних сил относительно оси вращения.

Уравнение (3.17) аналогично уравнению  $ma_z = F_z$ . Аналогом массы является момент инерции, линейного ускорения — угловое ускорение, суммарной силы — суммарный момент внешних сил.

В общем случае вектор  $\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i m_i [\vec{r}_i, \vec{v}_i]$  не совпадает по направлению с осью вращения  $OZ$ . Однако, из соображений симметрии, ясно, что для однородного тела, симметричного относительно оси вращения, момент импульса относительно точки  $O$ , лежащей на оси вращения, совпадает по направлению с вектором угловой скорости  $\vec{\omega}$ . При этом  $|\vec{L}| = L_z$ . Следовательно,  $|\vec{L}| = L_z = J\omega_z = J\omega$ . Если учесть, что векторы  $\vec{L}$  и  $\vec{\omega}$  направлены одинаково, то можно записать

$$\vec{L} = J\vec{\omega}. \quad (3.18)$$

Следует помнить, что, в отличие от проекции момента импульса  $L_z$  в выражении (3.16), справедливого для любого тела, соотношение (3.18) имеет место лишь для тела, вращающегося вокруг оси симметрии, а также, как будет показано ниже, для несимметричного тела, вращающегося вокруг одной из так называемых главных осей.

Из вида формулы (3.18) вытекает независимость момента импульса  $\vec{L}$  от положения точки  $O$  на оси для однородного тела, вращающегося вокруг оси симметрии; для произвольного тела можно доказать, что значение момента импульса  $\vec{L}$  будет независимым от положения точки отсчета  $O$  только в том случае, когда ось вращения проходит через центр масс тела.

Понятие момента инерции было введено при рассмотрении вращения твердого тела. Однако эта величина существует безотносительно к вращению. Каждое тело, независимо от того, вращается



оно или покоится, обладает определенным моментом инерции относительно любой оси, подобно тому, как тело обладает массой независимо от того, движется оно или находится в покое. Следует отметить также, что выражение, определяющее момент инерции ( $J = \sum_i m_i R_i^2$ ), отражает свойство аддитивности этой физической

величины, т. е. момент инерции системы материальных точек относительно некоторой оси равен сумме моментов инерции всех материальных точек, составляющих эту систему, относительно той же оси.

При переходе к непрерывному распределению массы по всему объему тела необходимо от суммирования перейти к интегрированию. Элементарная масса  $dm$ , определяемая через плотность вещества в данной точке, может быть записана как  $dm = \rho(\vec{r})dV$ , где  $dV$  — элементарно малый объем около этой точки. Тогда выражение для определения осевого момента инерции примет вид

$$J = \int_V \rho R^2 dV. \quad (3.19)$$

Этот интеграл берется по всему объему тела. Величины  $\rho$  и  $R$  являются функциями координат, в частности, в декартовых координатах они зависят от  $x$ ,  $y$  и  $z$ .

Наиболее просто момент инерции вычисляется по формуле (3.19) для однородных ( $\rho = \text{const}$ ) и симметричных тел, вращающихся вокруг оси симметрии.

### 3.3. Теорема Штейнера. Тензор инерции

Если необходимо вычислить момент инерции тела относительно какой-либо другой оси, параллельной оси симметрии, то используется теорема Штейнера, которая формулируется так: *момент инерции тела ( $J$ ) относительно произвольной оси равен сумме момента инерции ( $J_C$ ) относительно оси, параллельной данной и проходящей*

через центр масс тела, и произведения массы тела ( $m$ ) на квадрат расстояния ( $l$ ) между осями, т. е.

$$J = J_C + ml^2. \quad (3.20)$$

Для тел достаточно сложной формы вычисление момента инерции ( $J$ ) по формуле (3.19) возможно далеко не всегда. В общем случае момент инерции приходится измерять. Специальных приборов для измерения этой величины нет, поэтому для измерения момента инерции обычно используют наблюдение какого-либо движения, характеристики которого известным образом зависят от величины момента инерции.

Ранее было установлено, что для однородного тела, вращающегося вокруг оси симметрии, векторы  $\vec{L}$  и  $\vec{\omega}$  коллинеарны и связь между ними выражается формулой (3.18), что эквивалентно трем скалярным уравнениям (если ось  $Z$  не совпадает с осью вращения, а направлена произвольно):

$$L_x = J\omega_x, \quad L_y = J\omega_y, \quad L_z = J\omega_z. \quad (3.21)$$

В общем случае векторы  $\vec{L}$  и  $\vec{\omega}$  образуют угол, отличный от нуля, поэтому связь между компонентами этих векторов выражается более сложными формулами, чем (3.21). Получим эти общие формулы.

Будем исходить из определения момента импульса тела. Точку отсчета выберем в центре масс тела. Таким образом,

$$\vec{L} = \sum_i m_i [\vec{r}_i, \vec{v}_i],$$

где  $\vec{r}_i$  — радиус-вектор, проведенный из центра масс к материальной точке массой  $m_i$ . Линейную скорость заменим согласно формуле (3.4). Тогда получаем

$$\vec{L} = \sum_i m_i [\vec{r}_i, [\vec{\omega}, \vec{r}_i]].$$

Двойное векторное произведение разложим по формуле  $[\vec{A}, [\vec{B}, \vec{C}]] = \vec{B} \cdot (\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C} \cdot (\vec{A} \cdot \vec{B})$  (она еще называется формулой «бац минус цаб»). Здесь в круглых скобках стоит скалярное произведение векторов. В результате получаем

$$\vec{L} = \sum_i m_i \{ \vec{\omega}(\vec{r}_i \cdot \vec{r}_i) - \vec{r}_i(\vec{r}_i \cdot \vec{\omega}) \}. \quad (3.22)$$

Введем жестко связанную с телом декартову систему координат, начало которой поместим в точку  $C$  (рис. 3.3). Преимущество такой системы координат (по сравнению с неподвижной) заключается в том, что в ней при вращательном движении тела изменяются только векторы  $\vec{\omega}$  и  $\vec{L}$ , а векторы  $\vec{r}_i$  остаются неизменными.

Распишем скалярные произведения в формуле для момента импульса (3.22) через проекции векторов  $\vec{\omega}$  и  $\vec{r}_i$  на оси координат. Для проекций  $\vec{r}_i$  можно записать  $r_{ix} = x_i$ ,  $r_{iy} = y_i$ ,  $r_{iz} = z_i$ . Получаем

$$\vec{L} = \sum_i m_i \left\{ \vec{\omega} (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) - \vec{r}_i (x_i \omega_x + y_i \omega_y + z_i \omega_z) \right\}. \quad (3.23)$$

Определим проекции вектора момента импульса  $\vec{L}$  на ось  $X$ :

$$\begin{aligned} L_x &= \sum_i m_i \left\{ \omega_x (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) - x_i (x_i \omega_x + y_i \omega_y + z_i \omega_z) \right\} = \\ &= \omega_x \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2) - \omega_y \sum_i m_i x_i y_i - \omega_z \sum_i m_i x_i z_i = \\ &= \omega_x J_{xx} + \omega_y J_{xy} + \omega_z J_{xz}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

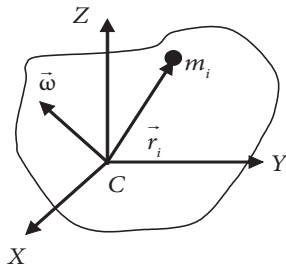


Рис. 3.3. Выбор системы координат, связанной с твердым телом

Аналогично определяются проекции вектора момента импульса  $\vec{L}$  на оси  $Y$  и  $Z$ :

$$\begin{aligned} L_y &= -\omega_x \sum_i m_i y_i x_i + \omega_y \sum_i m_i (x_i^2 + z_i^2) - \omega_z \sum_i m_i y_i z_i = \\ &= \omega_x J_{yx} + \omega_y J_{yy} + \omega_z J_{yz}; \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} L_z &= -\omega_x \sum_i m_i z_i x_i - \omega_y \sum_i m_i z_i y_i + \omega_z \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) = \\ &= \omega_x J_{zx} + \omega_y J_{zy} + \omega_z J_{zz}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

В этих формулах введены новые обозначения:

$$\begin{aligned} J_{xx} &= \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2); \quad J_{xy} = -\sum_i m_i x_i y_i = J_{yx}; \quad J_{xz} = -\sum_i m_i x_i z_i = J_{zx}; \\ J_{yy} &= \sum_i m_i (x_i^2 + z_i^2); \quad J_{yz} = -\sum_i m_i y_i z_i = J_{zy}; \quad J_{zz} = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2). \end{aligned}$$

Совокупность величин  $J_{ij}$  называется *тензором инерции*  $I$ . Эту величину принято записывать в виде квадратной таблицы:

$$\begin{aligned} I &= \begin{pmatrix} \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2) & -\sum_i m_i x_i y_i & -\sum_i m_i x_i z_i \\ -\sum_i m_i y_i x_i & \sum_i m_i (x_i^2 + z_i^2) & -\sum_i m_i y_i z_i \\ -\sum_i m_i z_i x_i & -\sum_i m_i z_i y_i & \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Используя определение тензора инерции, три формулы, (3.24)–(3.26), можно записать в более компактном виде:

$$L_i = \sum_{j=x,y,z} J_{ij} \omega_j, \quad i = (x, y, z). \quad (3.28)$$

Диагональные компоненты тензора инерции  $J_{xx}$ ,  $J_{yy}$ ,  $J_{zz}$  представляют собой рассмотренные выше моменты инерции относительно соответствующих координатных осей. Эти компоненты называются *осевыми моментами инерции*. Недиagonальные компоненты тензора инерции называются *центробежными моментами инерции*, причем  $J_{xy} = J_{yx}$ ,  $J_{xz} = J_{zx}$  и  $J_{yz} = J_{zy}$ . Тензор, компоненты которого удовлетворяют этому условию, называется симметричным.

Практически компоненты тензора инерции вычисляются с помощью интегрирования. Например, компонента  $J_{zz}$  определяется так:

$$J_{zz} = \int_V \rho(x, y, z) (y^2 + x^2) dV, \quad (3.29)$$

где  $\rho(x, y, z)$  — плотность;  $dV$  — элементарный объем.

При различном выборе декартовой системы координат компоненты  $J_{ij}$  тензора  $I$  будут изменять свои значения. В частности, систему координат можно выбрать таким образом, что все недиагональные элементы тензора будут равны нулю, а отличными от нуля будут лишь диагональные. В этом случае тензор инерции будет иметь вид

$$I = \begin{pmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{pmatrix}. \quad (3.30)$$

При такой ситуации говорят, что оси тела, совпадающие с осями координат, являются *главными осями инерции*, а величины  $J_x = J_{xx}$ ,  $J_y = J_{yy}$ ,  $J_z = J_{zz}$  называют *главными моментами инерции*. О тензоре говорят в этом случае, что он приведен к диагональному виду. Таким образом, если оси системы координат направлены вдоль главных осей инерции тела, то центробежные моменты инерции отсутствуют.

Процесс нахождения главных осей сводится к математической процедуре диагонализации тензора (он рассматривается в соответствующих разделах алгебры). Отметим лишь результат: через любую точку твердого тела можно провести три взаимно перпен-

дикулярные главные оси. Если главные оси проведены через центр масс, они называются *центральными главными осями*.

Главные оси во многих случаях могут быть найдены без громоздких математических расчетов, которые надо провести для диагонализации тензора инерции. Для этого иногда бывает достаточно воспользоваться соображением симметрии. Так, главные оси легко определить для однородных симметричных тел (шар, куб, цилиндр, прямоугольный параллелепипед и т. д.). Главные оси инерции таких тел всегда совпадают с осями симметрии. Например, главные оси однородного прямоугольного параллелепипеда проходят через его геометрический центр перпендикулярно граням. Для однородного шара главными являются любые три взаимно перпендикулярные оси, проходящие через его центр. Можно доказать, что таким же свойством обладает и однородный куб. Для тел сложной формы главные оси и главные моменты инерции определяют обычно экспериментально.

Вычислим моменты инерции  $J$  произвольного тела относительно произвольной оси  $OA$  (рис. 3.4). Будем считать, что ось проходит

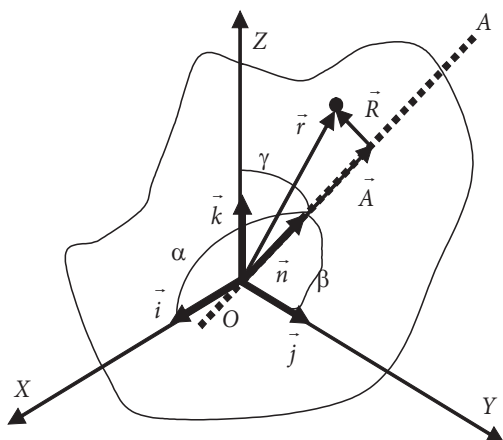


Рис. 3.4. Выбор системы координат для определения момента инерции тела относительно произвольной оси

через центр масс, с которым совпадает начало жестко связанной с телом декартовой системы координат  $O$ .

Радиус-вектор  $\vec{r}$ , характеризующий положение материальной точки относительно начала координат, можно разложить на составляющие: вдоль оси  $OA$  (вектор  $\vec{A}$ ) и перпендикулярную к ней (вектор  $\vec{R}$ ), т. е.  $\vec{r} = \vec{A} + \vec{R}$ . По формуле (3.19) имеем

$$J = \int_V \rho R^2 dV = \int_V \rho (r^2 - A^2) dV. \quad (3.31)$$

Направление оси  $OA$  можно задать единичным вектором  $\vec{n}$ , направленным по оси  $OA$ . Проекции вектора  $\vec{n}$  на оси координат можно вычислить, используя скалярное произведение  $\vec{n}$  на соответствующий орт:

$$\begin{aligned} n_x &= (\vec{n} \cdot \vec{i}) = \cos \alpha, \\ n_y &= (\vec{n} \cdot \vec{j}) = \cos \beta, \\ n_z &= (\vec{n} \cdot \vec{k}) = \cos \gamma, \end{aligned}$$

где  $\alpha, \beta, \gamma$  — углы между  $\vec{n}$  и осями  $X, Y, Z$  соответственно. Таким образом,

$$\vec{n} = (n_x, n_y, n_z) = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma). \quad (3.32)$$

Кроме того, имеем

$$n^2 = (\vec{n} \cdot \vec{n}) = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2. \quad (3.33)$$

Проекцию вектора  $\vec{r}$  на ось  $OA$ , т. е. модуль вектора  $\vec{A}$ , можно записать так:

$$|\vec{A}| = A = (\vec{r} \cdot \vec{n}) = xn_x + yn_y + zn_z. \quad (3.34)$$

Очевидно также, что модуль радиус-вектора  $\vec{r}$  равен

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (3.35)$$

Подставляя выражения (3.34), (3.35) в формулу (3.31) и учитывая соотношение (3.33), получаем

$$J = J_{xx}n_x^2 + J_{yy}n_y^2 + J_{zz}n_z^2 + 2J_{xy}n_xn_y + 2J_{yz}n_yn_z + 2J_{zx}n_zn_x, \quad (3.36)$$

где  $J_{xx}, J_{yy}, \dots, J_{zx}$  — компоненты тензора инерции (см. формулу (3.27)).

Выражение (3.36) значительно упрощается, если координатные оси направить вдоль главных осей инерции. В этом случае тензор инерции становится диагональным (см. формулу (3.30)), а формула для вычисления момента инерции  $J$  приобретает вид

$$J(\vec{n}) = J_x n_x^2 + J_y n_y^2 + J_z n_z^2 \quad \text{или} \quad (3.37)$$

$$J = J_x \cos^2 \alpha + J_y \cos^2 \beta + J_z \cos^2 \gamma.$$

Часто выражение (3.37) записывают, вводя новые переменные:

$$\bar{x} = \frac{n_x}{\sqrt{J}}, \quad \bar{y} = \frac{n_y}{\sqrt{J}}, \quad \bar{z} = \frac{n_z}{\sqrt{J}}.$$

В этих переменных равенство (3.37) принимает вид

$$J_x \cdot \bar{x}^2 + J_y \cdot \bar{y}^2 + J_z \cdot \bar{z}^2 = 1.$$

Это уравнение эллипсоида, который называют эллипсоидом инерции тела.

Итак, если известны главные оси инерции и моменты инерции  $J_x, J_y, J_z$  относительно этих осей, то момент инерции относительно произвольной оси, проходящей через центр масс и составляющей с главными осями углы  $\alpha, \beta, \gamma$ , можно вычислить по формуле (3.37).

Если выбранная ось не проходит через центр масс, то вначале вычисляется момент инерции относительно оси, параллельной выбранной, но проходящей через центр масс, по формуле (3.37) и далее используется теорема Штейнера (3.20).



## Лабораторная работа 9

### Измерение моментов инерции тел

Цель работы:

- измерить величину момента инерции осесимметричного тела (коаксиального цилиндра) методом крутильных колебаний;
- провести сравнение измеренных значений со значениями момента инерции, полученными с помощью инструментальных измерений в рамках модели однородного тела.

#### Краткая теория

Значение момента инерции тела относительно некоторой оси (осевого момента инерции) может быть рассчитано по формуле (3.19)

$$J = \int_V \rho R^2 dV, \quad (3.38)$$

где  $\rho$  — плотность тела;  $R$  — расстояние от элементарного объема  $dV$  до оси.

Вычислим с помощью этой формулы величину момента инерции коаксиального цилиндра высотой  $h$ , имеющего внутренний и внешний радиусы, соответственно  $R_1$  и  $R_2$ , относительно его оси симметрии (рис. 3.5).

Направим ось  $Z$  системы координат вдоль оси симметрии цилиндра, а начало системы координат (точка 0) поместим на оси в середине высоты, т. е. в центре тяжести цилиндра. Мысленно разобьем коаксиальный цилиндр на тонкие диски высотой  $dz$ . На таком диске выделим узкий кольцевой слой радиусом  $R$  и шириной  $dR$ . На этом кольцевом слое выделим кольцевой сектор двумя радиальными прямыми, угол между которыми составляет малую величину  $d\varphi$ . Поскольку размеры данного сектора очень малы, мы не допустим большой ошибки, если его объем  $dV$  будем рассчитывать как объем

куба со сторонами  $Rd\varphi$ ,  $dR$  и  $dz$ . Таким образом, элементарно малый объем можно представить в виде

$$dV = R dR d\varphi dz.$$

Интегрирование по всему объему цилиндра эквивалентно тройному интегрированию: по  $\varphi$  в пределах от 0 до  $2\pi$ , по  $z$  в пределах от  $-h/2$  до  $h/2$  и по  $R$  в пределах от  $R_1$  до  $R_2$ . Таким образом, интеграл (3.38) можно записать в следующем виде:

$$J = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-h/2}^{h/2} dz \int_{R_1}^{R_2} \rho(z, R) R^3 dR.$$

Интегрирование по  $\varphi$  дает множитель  $2\pi$ , т. е.

$$J = 2\pi \int_{-h/2}^{h/2} dz \int_{R_1}^{R_2} \rho(z, R) R^3 dR.$$

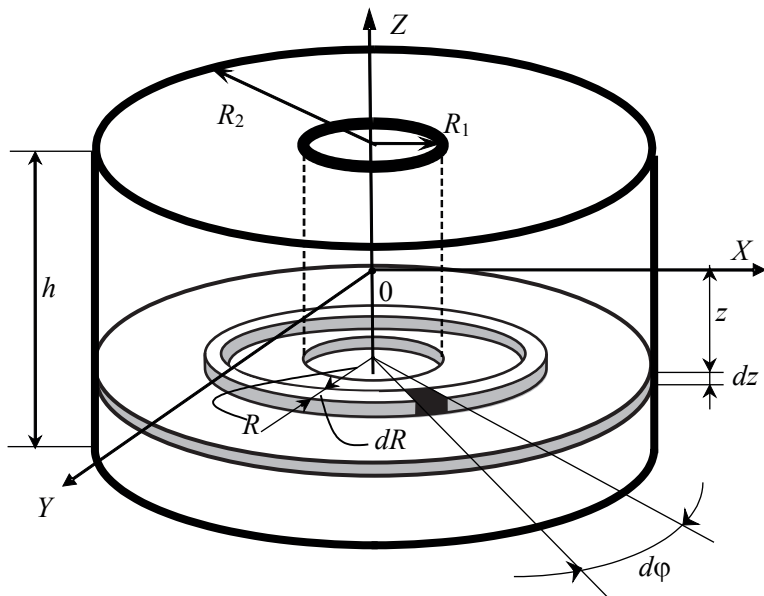


Рис. 3.5. Выбор системы координат для коаксиального цилиндра

Если предположить, что тело однородно ( $\rho = \text{const}$ ), то после интегрирования по  $z$  и  $R$ , получаем

$$J = 2\pi\rho \int_{-h/2}^{h/2} dz \int_{R_1}^{R_2} R^3 dR = 2\pi\rho \left\{ z \right|_{-h/2}^{h/2} \left\{ \frac{1}{4} R^4 \right|_{R_1}^{R_2} \right\} = \\ = \frac{1}{2} \pi \rho h (R_2^4 - R_1^4) = \frac{1}{2} \pi \rho h (R_2^2 - R_1^2) (R_2^2 + R_1^2).$$

Величина  $\pi(R_2^2 - R_1^2)$  — площадь основания цилиндра,  $\pi(R_2^2 - R_1^2)h$  — объем цилиндра, а  $\pi(R_2^2 - R_1^2)h\rho$  — масса цилиндра  $M$ . Таким образом, для расчета момента инерции однородного коаксиального цилиндра получаем простую формулу

$$J = \frac{1}{2} M (R_1^2 + R_2^2). \quad (3.39)$$

Итак, зная массу коаксиального цилиндра, а также внутренний и внешний диаметр, можно определить его момент инерции относительно оси симметрии.

Необходимо отметить следующее. Формула (3.39) применима для определения величины момента инерции цилиндра только в том случае, если заранее известно, что цилиндр однороден. Такое предположение (об однородности) отсутствует в методе крутильных колебаний.

Расчет интеграла в формуле (3.38) достаточно прост для тел, обладающих некоторой симметрией. Для тел произвольной формы аналитическое интегрирование в общем случае невозможно. В этой ситуации для определения момента инерции можно воспользоваться наблюдением какого-либо движения, одна из характеристик которого известным образом зависит от момента инерции. В данной работе такой характеристикой является период крутильных колебаний, который позволяет определять значения моментов инерции для тел произвольной формы, имеющих произвольное распределение плотности по объему.

Крутильными колебаниями называют колебания, которые совершает тело, прикрепленное к стержню (или упругой нити), если стержень (или нить) подвергнуть деформации кручения. Известно, что когда колебания совершает тело, подвешенное к пружине, подверженной деформации сжатия (растяжения), то тело в этом случае движется поступательно. Если деформации малы, т. е. справедлив закон Гука, то период таких колебаний  $T$  определяется по формуле  $T = 2\pi\sqrt{m/k}$ , где  $m$  — масса тела;  $k$  — жесткость пружины при деформации сжатия (растяжения).

При крутильных колебаниях тело как бы совершает незавершенные вращения относительно некоторой оси. Поэтому в формулу для периода колебаний вместо массы входит момент инерции относительно оси вращения, а вместо жесткости  $k$  — модуль кручения  $\mu$ . Таким образом, формула для периода крутильных колебаний приобретает вид

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{\mu}}. \quad (3.40)$$

Отметим, что она записана для случая незатухающих колебаний.

Связь между периодом колебаний и моментом инерции, задаваемая формулой (3.40), позволяет в принципе определить величину момента инерции  $J$  из измерений периода  $T$ , если известно значение модуля кручения  $\mu$ . Однако значение  $\mu$  обычно известно с невысокой точностью, поэтому способ измерения момента инерции  $J$ , основанный на соотношении (3.40), имеет большую систематическую погрешность.

Систематическую погрешность измерений, обусловленную погрешностью  $\mu$ , можно исключить, если метод крутильных колебаний использовать для определения отношения моментов инерции тел, прикрепленных к одной и той же нити. Очевидно, что это отношение не зависит от величины  $\mu$ . На самом деле пусть к нити прикреплено некоторое тело, имеющее момент инерции относительно оси, совпадающей с осью вращения, равный  $J_0$ . Период колебаний  $T_0$  такого тела равен

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J_0}{\mu}}. \quad (3.41)$$

Если к первому телу прикрепить другое тело, момент инерции которого относительно оси вращения равен  $J$ , то момент инерции такой системы будет равен сумме  $J + J_0$ . Соответственно изменится и период колебаний такой системы:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_0 + J}{\mu}}. \quad (3.42)$$

Разделив (3.42) на (3.41), найдем  $\frac{T}{T_0} = \sqrt{\frac{J_0 + J}{J_0}}$ . Отсюда

$$\frac{J}{J_0} = \left\{ \frac{T^2}{T_0^2} - 1 \right\} \quad \text{или} \quad J = J_0 \left\{ \frac{T^2}{T_0^2} - 1 \right\}. \quad (3.43)$$

Из формулы (3.43) видно, что систематическая погрешность определения отношения  $J/J_0$  зависит только от систематических погрешностей измерения периодов колебаний  $T$  и  $T_0$ , которые у современных секундомеров малы. Очевидно, что если величина  $J_0$  относительно оси вращения известна из каких-либо других соображений, то, вычислив соотношение  $J/J_0$  по формуле (3.43), легко определить момент инерции  $J$  относительно той же оси вращения.

### Методика эксперимента

Установка для измерения момента инерции методом крутильных колебаний представляет собой собранные на массивном основании колонку для крепления исследуемых образцов и миллисекундомер. На колонке при помощи прижимных винтов размещаются три кронштейна. Верхний и нижний кронштейны имеют зажимы, служащие для закрепления стальной проволоки, к которой подвешивается рамка с платформой в виде тонкого диска. Момент инерции рамки

с платформой  $J_0$  относительно оси вращения известен, его значение сообщит преподаватель. Конструкция рамки такова, что позволяет размещать на платформе различные тела, момент инерции которых необходимо измерить. На среднем кронштейне закреплена стальная плита, которая служит основанием фотоэлектрическому датчику, электромагниту и угловой шкале. Электромагнит может изменять положение на плите, а его положение относительно фотодатчика показывает на угловой шкале стрелка, прикрепленная к электромагниту.

На лицевой панели миллисекундомера находятся:

- клавиша «Сеть» — включатель сети. Нажатие этой клавиши вызывает включение питающего напряжения. При этом на двух цифровых табло должны высвечиваться нули, а также должна гореть лампочка фотодатчика;

- клавиша «Сброс» — сброс секундомера. Нажатие этой клавиши вызывает сброс схем блока измерений и генерирование сигнала, разрешающего измерение;

- клавиша «Стоп» — окончание измерений. При нажатии этой клавиши генерируется сигнал на окончание счета времени;

- клавиша «Пуск» — управление электромагнитом. Нажатие этой клавиши вызывает отключение тока, питающего электромагнит.

На лицевой панели имеются также два цифровых табло: на одном высвечивается число периодов колебаний рамки (левое табло), на другом — время, в течение которого эти колебания совершаются.

При нажатии клавиши «Сеть» секундомер устанавливается в начальное состояние (нули на цифровых индикаторах) и блокируется схема формирования импульсов. Эта блокировка снимается сигналом, который вырабатывается при нажатии клавиши «Сброс». Нажатие клавиши «Пуск» освобождает электромагнит, и начинаются крутильные колебания маятника. В момент первого прерывания светового потока генерируется электрический импульс, который подключает кварцевый генератор к счетчику времени. Кварце-

вый генератор вырабатывает импульсы с частотой 10 кГц, которые считываются счетчиком. Одновременно другой счетчик подсчитывает каждый (следующий после первого) нечетный импульс. Прохождение каждого такого нечетного импульса соответствует одному колебанию, и показание цифрового табло счетчика периодов изменится на единицу.

При нажатии клавиши «Стоп» формируется сигнал, подготавливающий схемы к прекращению счета. Счет прекращается в момент генерации фотодатчиком следующего нечетного импульса. При этом на цифровых табло высвечиваются число колебаний и время, в течение которого они совершились. Систематическая погрешность определения времени составляет 0,02 %.

Таким образом, методика измерения осевого момента инерции тела сводится к следующему. Вначале следует убедиться в применимости формулы (3.43), т.е. в том, что колебания слабозатухающие, после этого определить период колебания пустой платформы  $T_0$  и платформы с установленным на ней телом  $T$ . Затем рассчитать  $J$  образца по формуле (3.43).

Описанный метод пригоден для определения момента инерции тела произвольной формы относительно оси колебаний. В частном случае, когда тело установлено на платформе так, что ось колебаний совпадает с осью симметрии тела, методом крутильных колебаний определяется момент инерции относительно оси симметрии.

### Порядок выполнения работы и условия эксперимента

1. Включить прибор нажатием клавиши «Сеть», убедиться в том, что индикаторы измерителя высвечивают нули и светится лампочка фотодатчика. Установить электромагнит в некоторое положение и при помощи его зафиксировать рамку с платформой.

2. Убедиться, что колебания крутильного маятника являются слабозатухающими. Для этого, нажав последовательно клавиши «Сброс» и «Пуск», определить число колебаний  $N$ , за которое ам-

плитуда уменьшается в 2–3 раза. Если значение  $N > 10$ , то затухание мало и можно пользоваться формулой (3.43). Измерение  $N$  провести для пустой платформы и для платформы с установленным на нее кольцом.

3. Определить время  $t_0$ , в течение которого рамка с пустой платформой совершит  $N$  колебаний. Измерения следует провести при различных  $N$  (всего 5–7 раз). Очевидно, что  $T_0 = t_0/N$ . Данные занести в табл. 3.1. Рассчитать среднее значение  $T_0$ , случайную и систематическую погрешность.

Таблица 3.1

Измерение периода колебаний пустой платформы

№ п/п	$N$	$t_0$ , с	$T_0$ , с
1			
2			

4. Поместить на платформу исследуемый образец. Следить за тем, чтобы центр кольца совпадал с центром платформы. Измерить период колебаний  $T$  так же, как и в п. 3. Данные занести в табл. 3.2. Рассчитать среднее значение  $T$ , случайную и систематическую погрешность.

Таблица 3.2

Измерение периода колебаний платформы с исследуемым образцом

№ п/п	$N$	$t$ , с	$T$ , с
1			
2			

5. Рассчитать момент инерции кольца по формуле (3.43).

6. Определить массу кольца  $M$ . Для этого взвесить кольцо на технических весах дважды, располагая его на различных чашках. Найти среднее этих измерений, рассчитать случайную погрешность. Систематическую погрешность взвешивания считать равной массе наименьшего используемого разновеса.



7. Измерить внутренний и внешний радиусы кольца с помощью штангенциркуля. Измерение проводить не менее 5 раз. Данные занести в табл. 3.3. Рассчитать среднее значение  $R_1$  и  $R_2$ , их случайные и систематические погрешности.

Таблица 3.3

Измерение внутреннего ( $R_1$ ) и внешнего ( $R_2$ ) радиусов исследуемого образца с помощью штангенциркуля

№ п/п	$R_1$ , мм	$R_2$ , мм
1		
2		

8. Рассчитать момент инерции кольца по формуле (3.39).

### Обработка результатов измерения

Величины моментов инерции кольца, измеренные как методом крутильных колебаний, так и методом, использующим формулу (3.39), являются результатом косвенных измерений. Получим формулы для расчета погрешности измерений величин  $\Delta J$ , полученных этими методами. Для метода крутильных колебаний, в соответствии с правилами расчета погрешности косвенных измерений и формулой (3.43), получаем

$$\begin{aligned}\Delta J &= \sqrt{\left(\frac{\partial J}{\partial J_0} \Delta J_0\right)^2 + \left(\frac{\partial J}{\partial T_0} \Delta T_0\right)^2 + \left(\frac{\partial J}{\partial T} \Delta T\right)^2} = \\ &= \sqrt{\left[\left(\frac{T^2}{T_0^2} - 1\right) \Delta J_0\right]^2 + \left(2J_0 \frac{T^2}{T_0^3} \Delta T_0\right)^2 + \left(2J_0 \frac{T}{T_0^2} \Delta T\right)^2}.\end{aligned}$$

Разделив обе части полученного выражения на  $J$ , получаем

$$\frac{\Delta J}{J} = \sqrt{\left(\frac{\Delta J_0}{J_0}\right)^2 + \left(\frac{2T^2}{T^2 - T_0^2}\right)^2 \left[\left(\frac{\Delta T_0}{T_0}\right)^2 + \left(\frac{\Delta T}{T}\right)^2\right]}. \quad (3.44)$$

Подставляя в (3.44) вместо  $\Delta J_0$ ,  $\Delta T_0$  и  $\Delta T$  вначале случайные, а затем систематические погрешности измеряемых впрямую величин, рассчитываются погрешности  $J$ , обусловленные соответственно случайными ( $\overset{\circ}{\Delta} J$ ) и систематическими ( $\Delta_c J$ ) погрешностями прямых измерений. Полная погрешность равна

$$\Delta J = \sqrt{\left(\overset{\circ}{\Delta} J\right)^2 + \left(\Delta_c J\right)^2}.$$

Аналогично выводится формула и для расчета погрешности измерения методом, использующим формулу (3.39):

$$\begin{aligned} \Delta J &= \sqrt{\left(\frac{\partial J}{\partial M} \Delta M\right)^2 + \left(\frac{\partial J}{\partial R_1} \Delta R_1\right)^2 + \left(\frac{\partial J}{\partial R_2} \Delta R_2\right)^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{R_1^2 + R_2^2}{2} \Delta M\right)^2 + (MR_1 \Delta R_1)^2 + (MR_2 \Delta R_2)^2} \end{aligned}$$

или

$$\frac{\Delta J}{J} = \sqrt{\left(\frac{\Delta M}{M}\right)^2 + 4 \cdot \frac{(R_1 \Delta R_1)^2 + (R_2 \Delta R_2)^2}{(R_1^2 + R_2^2)^2}}. \quad (3.45)$$

Так же, как и раньше, по формуле (3.45) рассчитываются погрешности, обусловленные случайными и систематическими погрешностями прямых измерений, а затем и полная погрешность.

После вычисления погрешностей можно провести корректное сравнение результатов измерения величин момента инерции, полученных разными способами. В том случае если результаты измерений различаются на величину большую, чем погрешности эксперимента, необходимо сделать вывод о возможных причинах такого расхождения.

### Контрольные вопросы и задания

1. Что называют осевым моментом инерции тела? Что характеризует эта физическая величина?
2. Что называют тензором инерции тела? Что такое осевые и центробежные моменты инерции?
3. Какие оси тела называются главными осями инерции, центральными главными осями?
4. Что такое эллипсоид инерции?
5. Выведите формулу для вычисления момента инерции цилиндра через его геометрические размеры.
6. Какие колебания называются крутильными? Чему равен период крутильных колебаний?
7. Выведите формулу для вычисления момента инерции цилиндра для метода крутильных колебаний.
8. Сформулируйте теорему Штейнера.

## Лабораторная работа 10

### Измерение моментов инерции параллелепипеда

Цель работы:

- измерить величины моментов инерции параллелепипеда относительно различных осей методом крутильных колебаний;
- провести сравнение измеренных значений со значениями момента инерции, полученного с помощью инструментальных измерений в рамках модели однородного тела.

#### Краткая теория

Во введении показано, что момент инерции любого тела относительно любой оси можно определить, если известны главные моменты инерции  $J_x$ ,  $J_y$  и  $J_z$ . Обычно эти величины необходимо находить экспериментально. Однако для тел, обладающих симметрией, моменты инерции можно рассчитать достаточно просто. Рассчитаем их для однородного параллелепипеда.

Главными осями параллелепипеда являются прямые, проходящие через его геометрический центр перпендикулярно его граням. Введем жестко связанную с телом систему координат, оси которой направлены вдоль главных осей, а начало отсчета находится в геометрическом центре параллелепипеда (рис. 3.6). Для однородного тела эта точка совпадает с центром тяжести. Будем считать, что ось  $OZ$  направлена вдоль самого короткого ребра длиной  $a$ , а ось  $OX$  — вдоль самого длинного ребра длиной  $c$ .

Вычислим осевой момент  $J_{zz}$ . При нашем выборе системы координат он будет равен главному моменту, так как ось  $OZ$  направлена вдоль главной оси. Мысленно разобьем параллелепипед на столбики с площадью основания  $dS = dx dy$  и высотой  $a$ . Все точки такого столбика характеризуются одинаковыми значениями координат  $x$  и  $y$ . Объем его  $dV$  равен  $adxdy$ , а масса  $dm = \rho dV = \rho dx dy$ . По-

этому вклад данного столбика в величину  $J_{zz}$  определяется согласно формуле (3.29):

$$(dJ_{zz})_{\text{столб}} = (x^2 + y^2) dm = a\rho(x^2 + y^2) dx dy. \quad (3.46)$$

Интегрирование (3.46) по  $y$  дает вклад в  $J_{zz}$  слоя высотой  $a$  и толщиной  $dx$ :

$$\begin{aligned} (dJ_{zz})_{\text{слой}} &= \int_{-b/2}^{b/2} a\rho(x^2 + y^2) dx dy = \\ &= a\rho x^2 dx \int_{-b/2}^{b/2} dy + a\rho dx \int_{-b/2}^{b/2} y^2 dy = a\rho \left( bx^2 + \frac{1}{12} b^3 \right) dx. \end{aligned}$$

Интегрируя полученное выражение по  $x$ , получим для всего параллелепипеда

$$\begin{aligned} J_{zz} &= \int_{-c/2}^{c/2} a\rho \left( bx^2 + \frac{1}{12} b^3 \right) dx = a\rho \left( \int_{-c/2}^{c/2} bx^2 dx + \frac{b^3}{12} \int_{-c/2}^{c/2} dx \right) = \\ &= a\rho \left( \frac{1}{12} bc^3 + \frac{1}{12} b^3 c \right) = \frac{1}{12} \rho abc (b^2 + c^2) = \frac{1}{12} \rho V (b^2 + c^2) = \frac{m}{12} (b^2 + c^2). \end{aligned}$$

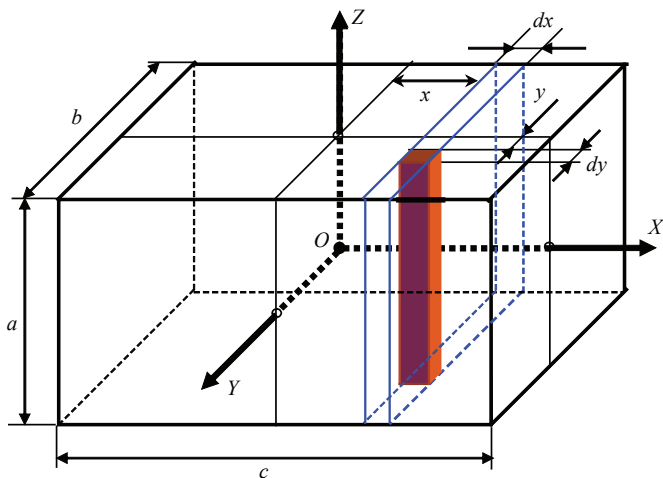


Рис. 3.6. Выбор системы координат для параллелепипеда

Аналогично можно получить

$$J_{xx} = \frac{m}{12}(a^2 + b^2) \quad \text{и} \quad J_{yy} = \frac{m}{12}(a^2 + c^2).$$

Итак, главные моменты инерции однородного параллелепипеда равны

$$J_x = \frac{m}{12}(a^2 + b^2), \quad J_y = \frac{m}{12}(a^2 + c^2), \quad J_z = \frac{m}{12}(b^2 + c^2). \quad (3.47)$$

Нетрудно заметить, что для куба, у которого длины ребер равны между собой ( $a = b = c$ ), главные моменты инерции одинаковы:  $J_x = J_y = J_z = (1/6) \cdot ma^2$ .

Если определены главные моменты инерции тела, то момент инерции его относительно оси, направленной вдоль вектора  $\vec{n}$  и проходящей через центр тяжести, рассчитывается по формуле (3.37):

$$J(\vec{n}) = J_x \cos^2 \alpha + J_y \cos^2 \beta + J_z \cos^2 \gamma, \quad (3.48)$$

где  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  — углы, которые составляет вектор  $\vec{n}$  с координатными осями  $OX$ ,  $OY$  и  $OZ$  соответственно.

В данной лабораторной установке ось вращения тела (ось маятника) направлена по вертикали. Поэтому во всех опытах следует считать, что единичный вектор  $\vec{n}$  направлен вертикально вверх. Таким образом, закрепляя параллелепипед в различных положениях, мы изменяем расположение жестко связанной с телом системы координат относительно постоянного вектора  $\vec{n}$  и тем самым меняем углы  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ .

Вычисление направляющих косинусов  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$  и  $\cos \gamma$  представляет собой чисто геометрическую задачу. На рис. 3.7 изображены некоторые возможные оси, относительно которых будут определяться моменты инерции. Видно, что направляющие косинусы осей, совпадающих с главными диагоналями, например  $AA_1$ , равны

$$\cos \alpha = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

$$\cos \beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \quad (3.49)$$

$$\cos \gamma = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Образцы могут быть закреплены также в точках, лежащих посредине граней и ребер. При использовании этих точек, расположенных симметрично относительно центра тяжести (точки  $O$ ), можно измерить моменты инерции относительно диагоналей соответствующих сечений или главных осей. Различные оси будут определяться различными наборами направляющих косинусов. Так, для оси  $BB_1$  (рис. 3.7) получаем

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}}, \\ \cos \beta &= 0, \end{aligned} \quad (3.50)$$

$$\cos \gamma = \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}}.$$

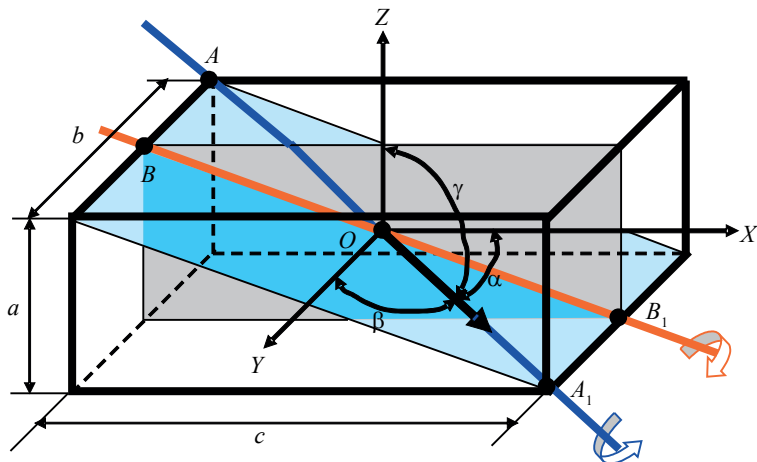


Рис. 3.7. Схематичное изображение возможных осей вращения параллелепипеда

Зная массу параллелепипеда и его геометрические размеры, можно определить моменты инерции относительно любой оси, проходящей через центр.

В заключение отметим, что в силу равенства  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$  моменты инерции куба относительно любой оси, проходящей через центр тяжести, одинаковы и равны  $J_{\text{куб}} = ma^2/6$ .

Момент инерции тела относительно произвольной оси можно измерить, если знать период колебаний тела вокруг этой оси (см. лабораторную работу 9). Как показано в описании к лабораторной работе 9, для определения момента инерции необходимо измерить период крутильных колебаний, который связан с моментом инерции тела  $J$  относительно оси колебаний простым соотношением

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{\mu}}, \quad (3.51)$$

где  $\mu$  — модуль кручения, характеризующий жесткость тела относительно деформации кручения.

Исследуемое тело жестко закрепляется в рамке крутильного маятника, подвешенной на упругой вертикально натянутой проволоке. Если вывести маятник из равновесия, то он будет совершать колебания с периодом  $T = 2\pi \sqrt{J_M/\mu}$ . Здесь  $J_M$  — момент инерции маятника, который равен сумме момента инерции рамки  $J_0$  и момента инерции исследуемого тела  $J$ . Таким образом,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_0 + J}{\mu}}. \quad (3.52)$$

Если колеблется одна рамка без тела, то ее период колебаний, очевидно, равен

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J_0}{\mu}}. \quad (3.53)$$



Исключая из этих уравнений неизвестную величину  $\mu$ , находим

$$J = J_0 \frac{T^2 - T_0^2}{T_0^2}. \quad (3.54)$$

Из соотношения (3.54) видно, что для определения момента инерции относительно маятника необходимо измерить периоды колебания  $T_0$  и  $T$  соответственно для свободной рамки и для рамки с телом. Величину  $J_0$  необходимо определить заранее, например, измеряя периоды колебания закрепленного в рамке тела, момент инерции которого относительно оси колебаний известен из других соображений.

В данной работе в качестве такого тела используется однородный куб, моменты инерции которого (как показано выше), относительно любой оси, проходящей через его центр, одинаковы и равны  $J_{\text{куб}} = m_{\text{куб}} a_{\text{куб}}^2 / 6$ . Очевидно, что момент инерции свободной рамки можно определить по формуле

$$J_0 = J_{\text{куб}} \cdot \frac{T_0^2}{T_{\text{куб}}^2 - T_0^2} = \frac{m_{\text{куб}}}{6} a_{\text{куб}}^2 \frac{T_0^2}{T_{\text{куб}}^2 - T_0^2}. \quad (3.55)$$

Здесь  $m_{\text{куб}}$  и  $a_{\text{куб}}$  — масса и длина ребра куба, а  $T_0$  и  $T_{\text{куб}}$  — периоды колебаний пустой рамки и рамки с кубом соответственно.

### Методика эксперимента

Установка для измерения момента инерции методом крутильных колебаний представляет собой собранные на одном массивном основании стойку для крепления образцов и миллисекундомер. На стойке находятся три кронштейна. Верхний и нижний кронштейны нужны для крепления стальной проволоки, к которой подвешивается рамка. В рамке можно жестко закрепить исследуемое тело. На среднем кронштейне размещена платформа, которая служит основанием фотоэлектрического датчика и угловой шкалы, используемой для отсчета угла поворота крутильного маятника.

На лицевой панели миллисекундомера находятся:

- клавиша «Сеть» — выключатель сети. Нажатие этой клавиши вызывает включение питающего напряжения (при этом на цифровых табло должны высвечиваться нули и гореть лампочка фотодатчика);

- клавиша «Сброс» — сброс измерений. Нажатие этой клавиши вызывает сброс схем блока измерений и генерирование сигнала, разрешающего измерение;

- клавиша «Стоп» — окончание измерений. При нажатии этой клавиши генерируется сигнал на окончание процесса счета времени.

Два цифровых табло, находящихся на лицевой панели, показывают число колебаний рамки (левое) и время (правое), в течение которого они совершаются.

При нажатии клавиши «Сеть» секундомер устанавливается в начальное состояние (нули на индикаторах) и блокируется схема формирования импульсов.

Эта блокировка снимается при нажатии клавиши «Сброс». В момент первого прерывания светового потока, падающего на фототранзистор от лампочки (при наличии крутильных колебаний), генерируется электрический импульс, который подключает кварцевый генератор к счетчику времени. Счетчик подсчитывает число импульсов, следующих с кварцевого генератора с частотой 10 кГц. Одновременно другой счетчик подсчитывает каждый (следующий после первого) нечетный импульс, приходящий с фотоэлектрического датчика. Прохождение каждого такого нечетного импульса соответствует одному колебанию, и показание цифрового табло счетчика периодов изменяется на единицу.

При нажатии клавиши «Стоп» формируется сигнал, который подготавливает схемы к концу счета. Полностью счет прекращается в момент генерации фотодатчиком очередного нечетного импульса. При этом на табло высвечиваются число колебаний и время, в течение которого они совершились. Погрешность измерения времени составляет 0,02 %.

Таким образом, методика измерения момента инерции тела относительно оси колебаний заключается в следующем. Вначале надо убедиться в применимости формулы (3.51), которая справедлива, если колебания слабозатухающие. После этого, измеряя периоды колебаний пустой рамки и рамки с закрепленным в ней эталонным телом (кубом), определить момент инерции пустой рамки по формуле (3.55). Далее, закрепив в рамке исследуемый образец и измерив период колебаний крутильного маятника, по формуле (3.54) рассчитать момент инерции образца относительно оси колебаний.

Описанный выше метод можно применять для определения осевого момента инерции тела произвольной формы. В данной работе этот метод используется для определения момента инерции  $J$  образцов, имеющих форму параллелепипеда.

#### Порядок выполнения работы и условия эксперимента

1. Включить прибор нажатием клавиши «Сеть», убедиться, что индикаторы измерителя высвечивают нули и горит лампочка фотодатчика.

2. Убедиться, что колебания крутильного маятника слабозатухающие. Для этого, отклонив маятник на некоторый угол и нажав клавишу «Сброс», определить число колебаний  $N$ , за которое амплитуда колебаний уменьшается в 2–3 раза. Если  $N > 10$ , то затухание можно считать малым и пользоваться формулой (3.51) (а значит, и формулами (3.54) и (3.55)). Провести измерение числа колебаний  $N$  для пустой рамки и рамки с закрепленным на ней параллелепипедом.

3. Определить время  $t_0$ , в течение которого свободная рамка совершает  $N$  колебаний. Очевидно, что  $T_0 = t_0/N$ . Измерения провести 5–7 раз. Данные занести в табл. 3.4, рассчитать среднее значение, случайную и систематическую погрешность.

4. Укрепить в рамке куб так, чтобы ось вращения совпадала с главной осью. Измерить период колебаний рамки с кубом так же,

как в п. 3. Данные занести в табл. 3.5, рассчитать среднее значение, случайную и систематическую погрешность.

Таблица 3.4

Измерение периода колебаний свободной рамки

№ п/п	$N$	$t_0, \text{с}$	$T_0, \text{с}$
1			
2			

Таблица 3.5

Измерение периода колебаний рамки с кубом вдоль главной оси

№ п/п	$N$	$t_{\text{куб}}, \text{с}$	$T_{\text{куб}}, \text{с}$
1			
2			

5. Определить период колебаний крутильного маятника, если с осью вращения совпадают главная диагональ куба и диагональ его сечения. Данные занести в таблицу, аналогичную табл. 3.5, рассчитать среднее значение, случайную и систематическую погрешность.

6. Сравнить полученные значения периодов  $T_{\text{куб}}$  в пп. 4 и 5. Если значения периодов совпадают в пределах погрешности измерений, то провести их усреднение, считая измерения равноточными с систематической погрешностью метода, равной наибольшей погрешности отдельных измерений.

7. По формуле (3.55) рассчитать момент инерции пустой рамки  $J_0$ , считая, что  $J_{\text{куб}} = m_{\text{куб}} a_{\text{куб}}^2 / 6$ . Масса образца  $m_{\text{куб}}$  приведена на установке, размер ребра куба  $a_{\text{куб}}$  определяется штангенциркулем. Данные занести в табл. 3.6, рассчитать среднее значение, случайную и систематическую погрешность.

Таблица 3.6

Измерение длины ребра куба с помощью штангенциркуля

№ п/п	$a_{\text{куб}}, \text{мм}$
1	
2	

8. Определить периоды колебаний параллелепипеда относительно его главных осей ( $T_x$ ,  $T_y$ ,  $T_z$ ), относительно главной диагонали  $T_{AA'}$ , а также относительно диагоналей его сечений (рис. 3.7). Измерения провести так же, как в п. 3. Данные занести в табл. 3.7.

Таблица 3.7

Измерение периодов колебаний рамки с параллелепипедом относительно главных осей ( $T_x$ ,  $T_y$ ,  $T_z$ ), относительно главной диагонали  $T_{AA'}$ , а также относительно диагоналей его сечений (для каждой оси вращения заполняется таблица)

№ п/п	$N$	$t_x$ , с	$T_x$ , с
1			
2			

9. Рассчитать главные моменты инерции по формуле (3.54). Определить погрешности этих значений.

10. Провести измерения геометрических размеров параллелепипеда. Измерение проводить не менее 5 раз. Данные занести в табл. 3.8. Рассчитать среднее значение  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , их случайные и систематические погрешности.

11. Измерив геометрические размеры параллелепипеда и зная его массу (она приведена на установке), рассчитать главные моменты инерции по формулам (3.47). Сравнить их с величинами  $J_x$ ,  $J_y$ ,  $J_z$  полученными методом крутильных колебаний.

Таблица 3.8

Измерение геометрических размеров параллелепипеда с помощью штангенциркуля

№ п/п	$a$ , мм	$b$ , мм	$c$ , мм
1			
2			

12. Рассчитать по формуле (3.54) моменты инерции параллелепипеда относительно главной диагонали и диагоналей сечений. Определить погрешности.

13. Определить те же самые моменты инерции по формуле (3.48). В эти формулы подставить величины  $J_x, J_y, J_z$ , измеренные методом крутильных колебаний, и значения направляющих косинусов, характеризующих направление данной оси в выбранной ранее системе координат. Сравнить полученные значения со значениями, измеренными методом крутильных колебаний.

### Обработка результатов эксперимента

Полученные тем или другим способом величины  $J$  являются результатами косвенных измерений. Выведем формулы для расчета погрешностей.

Для расчета  $J_0$  используется формула (3.55), в которой величины  $a_{\text{куб}}, m_{\text{куб}}, T_{\text{куб}}$  и  $T_0$  — результат прямых измерений, погрешности которых известны. Эти погрешности обуславливают погрешность  $J_0$ , рассчитываемую следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta J_0 &= \sqrt{\left(\frac{\partial J_0}{\partial m_{\text{куб}}} \Delta m_{\text{куб}}\right)^2 + \left(\frac{\partial J_0}{\partial a_{\text{куб}}} \Delta a_{\text{куб}}\right)^2 + \left(\frac{\partial J_0}{\partial T_0} \Delta T_0\right)^2 + \left(\frac{\partial J_0}{\partial T_{\text{куб}}} \Delta T_{\text{куб}}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{a_{\text{куб}}^2 T_0^2 \cdot \Delta m_{\text{куб}}}{6 \frac{T_{\text{куб}}^2 - T_0^2}{T_0^2}}\right)^2 + \left(\frac{m_{\text{куб}} a_{\text{куб}} T_0^2 \cdot \Delta a_{\text{куб}}}{3 \frac{T_{\text{куб}}^2 - T_0^2}{T_0^2}}\right)^2 +} \\ &\quad + \left(\frac{m_{\text{куб}} a_{\text{куб}}^2 T_0 T_{\text{куб}}^2 \cdot \Delta T_0}{3 (T_{\text{куб}}^2 - T_0^2)^2}\right)^2 + \left(\frac{m_{\text{куб}} a_{\text{куб}}^2 T_0^2 T_{\text{куб}} \cdot \Delta T_{\text{куб}}}{3 (T_{\text{куб}}^2 - T_0^2)^2}\right)^2}; \\ \frac{\Delta J_0}{J_0} &= \sqrt{\left(\frac{\Delta m_{\text{куб}}}{m_{\text{куб}}}\right)^2 + 4 \left(\frac{\Delta a_{\text{куб}}}{a_{\text{куб}}}\right)^2 +} \\ &\quad + 4 \left(\frac{T_{\text{куб}}^2}{T_{\text{куб}}^2 - T_0^2}\right)^2 \left[\left(\frac{\Delta T_0}{T_0}\right)^2 + \left(\frac{\Delta T_{\text{куб}}}{T_{\text{куб}}}\right)^2\right]. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Подставляя в (3.56) вначале случайные, а затем систематические погрешности прямых измерений, рассчитываются погрешности  $J_0$ , которые обусловлены случайными ( $\Delta J_0$ ) и систематическими ( $\Delta_{\text{с}} J_0$ )

погрешностями прямых измерений. Полная погрешность равна

$$\Delta J_0 = \sqrt{\left(\overset{\circ}{\Delta} J_0\right)^2 + \left(\Delta_c J_0\right)^2}.$$

Аналогично получается выражение для расчета погрешности момента инерции, измеренного методом крутильных колебаний (3.54):

$$\frac{\Delta J}{J} = \sqrt{\left(\frac{\Delta J_0}{J_0}\right)^2 + 4\left(\frac{T^2}{T^2 - T_0^2}\right)^2 \left[\left(\frac{\Delta T_0}{T_0}\right)^2 + \left(\frac{\Delta T}{T}\right)^2\right]}. \quad (3.57)$$

Значения главных моментов инерции, вычисляемых по формулам (3.47), также отягощены погрешностями, так как размеры параллелепипеда и его масса определены с погрешностями. Формулы для расчета погрешностей  $J_x$ ,  $J_y$  и  $J_z$  выводятся аналогично формуле (3.56). Например, погрешность  $\Delta J_x$  рассчитывается так:

$$\begin{aligned} \Delta J_x &= \sqrt{\left(\frac{\partial J_x}{\partial m} \Delta m\right)^2 + \left(\frac{\partial J_x}{\partial a} \Delta a\right)^2 + \left(\frac{\partial J_x}{\partial b} \Delta b\right)^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{a^2 + b^2}{12} \Delta m\right)^2 + m^2 \left[\frac{(a \Delta a)^2 + (b \Delta b)^2}{36}\right]}. \end{aligned}$$

Для определения погрешности величины момента инерции относительно осей, не совпадающих с главными, надо выписать формулу (3.48), подставив в нее конкретные значения направляющих косинусов. Так, для оси, совпадающей с главной диагональю, используя (3.49), получаем следующее выражение:

$$J = \frac{c^2 J_x + b^2 J_y + a^2 J_z}{a^2 + b^2 + c^2},$$

где все величины известны с погрешностью. Находя частные производные по всем параметрам, известным с погрешностью, получаем

$$\Delta J = \sqrt{\left(\frac{c^2 \Delta J_x + b^2 \Delta J_y + a^2 \Delta J_z}{a^2 + b^2 + c^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial J}{\partial a} \Delta a\right)^2 + \left(\frac{\partial J}{\partial b} \Delta b\right)^2 + \left(\frac{\partial J}{\partial c} \Delta c\right)^2},$$

где 
$$\frac{\partial J}{\partial a} = \frac{2a \left[ (c^2 + b^2) J_z - (c^2 J_x + b^2 J_y) \right]}{(a^2 + b^2 + c^2)^2},$$

$$\frac{\partial J}{\partial b} = \frac{2b \left[ (a^2 + c^2) J_y - (c^2 J_x + a^2 J_z) \right]}{(a^2 + b^2 + c^2)^2},$$

$$\frac{\partial J}{\partial c} = \frac{2c \left[ (a^2 + b^2) J_x - (a^2 J_z + b^2 J_y) \right]}{(a^2 + b^2 + c^2)^2}.$$

Очевидно, что погрешность определения момента инерции относительно других осей должна иметь другой вид.

### Контрольные вопросы и задания

1. Что называют осевым моментом инерции тела? Что характеризует эта физическая величина?
2. Что называют тензором инерции тела? Что такое осевые и центробежные моменты инерции?
3. Какие оси тела называются главными осями инерции, центральными главными осями?
4. Что такое эллипсоид инерции?
5. Получите формулу для вычисления главных моментов инерции прямоугольного параллелепипеда через его геометрические размеры.
6. В чем состоит метод крутильных колебаний?
7. Выведите формулу для вычисления момента инерции тела методом крутильных колебаний.
8. Сформулируйте теорему Штейнера.



## Лабораторная работа 11

### Измерение угловой скорости

Цель работы:

- ознакомиться со способами измерения угловой скорости;
- измерить угловую скорость вращения электромотора в зависимости от приложенного напряжения.

#### Методика эксперимента

В данной работе необходимо измерить разными способами угловую скорость диска, жестко закрепленного на валу электромотора постоянного тока, в зависимости от приложенного к мотору напряжения.

Приборы и устройства, предназначенные для измерения частоты вращения, называются тахометрами (от греч. *тахеос* — быстрый). Следует подчеркнуть, что тахометры измеряют именно частоту вращения, а не угловую скорость. Частота вращения численно равна числу оборотов, совершаемых в единицу времени. В технике частоту вращения принято измерять в единицах «оборот в минуту». Если обозначить эту величину буквой  $n$ , то связь между  $\omega$  и  $n$  выражается соотношением

$$\omega = 2\pi \frac{n}{60}. \quad (3.58)$$

Простейший из тахометров, применяемых для быстрых оценочных измерений, — механический тахометр (рис. 3.8). На валу тахометра, которому при контакте передается вращение исследуемого объекта, установлена муфта с прикрепленными к ней на шарнирах грузах. При вращении вала грузы расходятся и перемещают муфту вдоль вала. Положение муфты на валу определяется скоростью вращения. Муфта связана рычажками со стрелкой, движущейся по циферблату. Шкала прибора проградуирована в единицах «об/мин». Очевидным недостатком такого тахометра является необходимость

контакта вала тахометра с исследуемым вращающимся объектом, в результате чего изменяется скорость вращения самого объекта. Предпочтительнее поэтому пользоваться бесконтактными методами.

Существует несколько методов, с помощью которых частота вращения может быть определена со значительно большей точностью. Одним из них является стробоскопический метод, в котором используется так называемый стробоскопический эффект.

Различают два стробоскопических (*стробос* — вихрь, *скопео* — смотрю) эффекта. Первый из них состоит в том, что быстрая смена отдельных фаз движения тела воспринимается глазом как непрерывное движение. Это связано с тем, что клетки сетчатой оболочки глаза сохраняют зрительный образ в течение примерно 0,1 с после исчезновения зримого объекта. И если время между появлениями отдельных изображений меньше 0,1 с, образы сливаются, возникает иллюзия непрерывности движения. На этом эффекте основаны кинематограф и телевидение.

Второй стробоскопический эффект состоит в том, что при определенных условиях возникает иллюзия не движения, а, наоборот, покоя предмета, который на самом деле движется.

Если какой-либо объект совершает периодическое движение (колеблется или вращается), то при освещении его прерывистыми световыми вспышками, следующими через равные промежутки

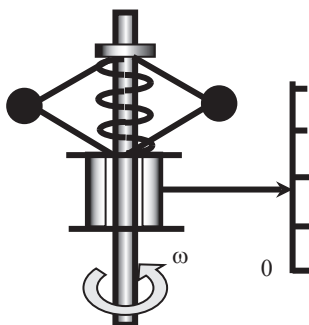


Рис. 3.8. Механический тахометр

времени, предмет будет казаться неподвижным, если частота вспышек в точности равна частоте колебаний вращения. Объясняется это тем, что глаз будет отмечать положение тела в момент световой вспышки и сохранит этот зрительный образ до следующей вспышки, которая при равных частотах вспышек и вращения застанет предмет на том же месте. Когда частота вспышек в целое число раз больше частоты вращения, картина тоже будет неподвижной, но теперь будет видно несколько «экземпляров» предмета. Если отношение частоты вспышек к частоте оборотов равно  $k$ , то за каждый оборот будет происходить  $k$  вспышек, которые застанут предмет в разных положениях, отличающихся на угол  $2\pi/k$ . Равенство всех углов означает, что тело вращается с постоянной угловой скоростью.

Если частота вспышек не в точности равна или не в точности кратна частоте вращения тела, то оно будет казаться медленно вращающимся в ту или другую сторону в зависимости от соотношения частот. Если частота вспышек намного больше частоты вращения, каждая последующая вспышка будет освещать предмет в положении, когда он еще не сделал полного оборота, и он будет казаться вращающимся в сторону, противоположную реальному вращению тела. Наоборот, если частота вспышек несколько меньше частоты вращения тела, кажущееся движение будет совпадать с направлением истинным. Такие стробоскопические иллюзии иногда наблюдаются в кино, когда, например, частота следования кинокадров больше или меньше частоты вращения колес.

Стробоскопический метод измерения частоты вращения обладает одним существенным недостатком, заключающимся в том, что одну и ту же неподвижную картину можно наблюдать при различных значениях  $k$ . Напомним, что  $k$  есть отношение числа вспышек к числу оборотов предмета. Эта величина может быть как больше, так и меньше единицы. Если число вспышек больше числа оборотов, то  $k > 1$ , и, наоборот, если число вспышек меньше числа оборотов, то  $k < 1$ .

Пусть наблюдается один «экземпляр» предмета. Это возможно, если за время, равное периоду следования вспышек, предмет по-

вернулся на угол  $2\pi$ ,  $4\pi$ ,  $6\pi$  и т. д. (в общем случае этот угол равен  $2\pi m$ , где  $m = 1, 2, 3, \dots$ ) т. е. совершил 1, 2, 3, ...  $m$  оборотов. Другими словами, это возможно при  $k = 1, 1/2, 1/3, \dots$  (в общем случае  $k = 1/m$ ). Итак, если при освещении вращающегося объекта импульсным осветителем наблюдается один «экземпляр» предмета, то вывод, который из этого можно сделать, заключается лишь в том, что число оборотов или равно числу вспышек, или в целое число раз меньше числа вспышек.

Такая же неоднозначность возникает при наблюдении двух «экземпляров» предмета. Аналогично можно показать, что такая ситуация возможна, если  $k = 2, 2/3, 2/5$  и т. д. Нетрудно показать, что неоднозначность определения числа оборотов стробоскопическим методом существует при наблюдении любой неподвижной картинке.

Такого недостатка лишен другой метод бесконтактного измерения частоты вращения, идея которого заключается в следующем. На вращающемся предмете перпендикулярно оси вращения жестко укрепляется диск с отверстиями, равномерно расположенными по его краю. При своем движении эти отверстия периодически перекрывают световой пучок, направленный на фотодатчик. Тем самым фотодатчик генерирует последовательность импульсов, частота которых определяется частотой вращения и числом отверстий. Количество импульсов в единицу времени подсчитывается специальным счетчиком. Результат высвечивается на цифровом табло. Приборы, основанные на этом методе, называются цифровыми тахометрами.

Обычно число отверстий на диске и время счета импульсов выбирают такими, чтобы число подсчитанных импульсов за время счета было равно числу оборотов в минуту. Так, если время счета импульсов равно 1 с, то число отверстий на диске должно быть равно 60. Это можно пояснить на следующем простом примере. Пусть диск совершает 1 об/с. Тогда число импульсов, которые подсчитает прибор за 1 с и высветит на табло, будет равно 60, что, очевидно, есть число оборотов диска в минуту.

Данный способ определения числа оборотов лишен недостатков двух предыдущих способов, но применение его сопряжено с иногда непреодолимыми техническими трудностями, связанными с размещением диска на вращающемся объекте.

Блок-схема установки, используемой в данной работе, изображена на рис. 3.9.

Электромотор постоянного тока питается от выпрямительного устройства, преобразующего переменное напряжение сети в постоянное напряжение, величина которого плавно регулируется. Напряжение на моторе измеряется вольтметром. На валу мотора укреплен легкий диск с белой радиальной полосой, необходимой для наблюдения стробоскопического эффекта. По краю диска выверлены 60 равноотстоящих друг от друга отверстий, необходимых для определения числа оборотов при помощи цифрового тахометра. Освещение диска производится импульсным осветителем стробоскопического тахометра, с которым осветитель связан гибким шнуром. Отверстия на диске пересекают ось фотодатчика, который формирует импульсы, поступающие на цифровой тахометр. Питание электромотора осуществляется выпрямителем типа ВСА-5К, лицевая панель которого изображена на рис. 3.10.

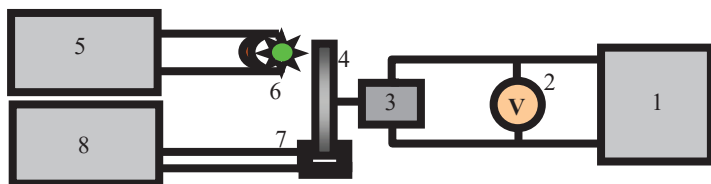


Рис. 3.9. Блок-схема установки для определения угловой скорости:  
1 — выпрямительное устройство; 2 — вольтметр; 3 — электромотор  
постоянного тока; 4 — диск; 5 — стробоскопический тахометр;  
6 — импульсный осветитель; 7 — фотодатчик; 8 — цифровой тахометр

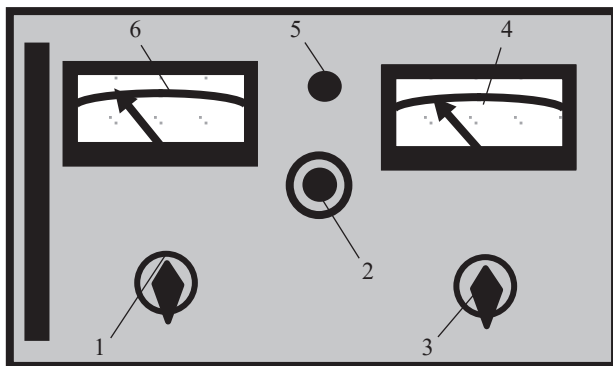







Рис. 3.10. Выпрямитель типа ВСА-5К:  
1 — тумблер; 2 — ручка; 3 — тумблер;  
4, 6 — измерительные приборы; 5 — индикаторная лампа


Выпрямитель присоединяется к сети шнуром с левой стороны прибора, шнур с правой стороны присоединяется к электромотору. Его включение производится поворотом тумблера 1 вправо или влево, при этом загорается индикаторная лампа. Выходное напряжение, подаваемое к мотору, включается тумблером 3 поворотом его влево в положение «1-я ступень» («1 ст.»). Плавное изменение выходного напряжения осуществляется при помощи ручки. В лицевую панель выпрямителя вмонтированы измерительные приборы 4 и 6, контролирующие выходной ток и напряжение, которые, однако, в силу их низкой точности, в работе не используются.

Величина напряжения на электромоторе измеряется универсальным вольтметром В7-16А. Им можно определять напряжение постоянного и переменного токов в диапазоне  $1 \times 10^{-4} - 1000$  В и активное сопротивление в диапазоне  $0,1 - 10^7$  Ом. В этой работе напряжение на электромоторе будет изменяться в пределах от 5 до 15 В. Погрешность определения величины напряжения рассчитывается по формуле

$$\frac{\Delta U}{U} = \pm \left[ 0,1 + 0,05 \left( \left| \frac{U_k}{U_x} \right| - 1 \right) \right] \% , \quad (3.59)$$

где  $U_x$  — измеряемое напряжение;  $U_k$  — предельное напряжение в выбранном диапазоне (в этой работе 10 или 100 В).

Для включения вольтметра установить тумблер «Сеть» в верхнее положение. Установить тумблер  в положение  (автоматический запуск). Установить потенциометр «вр. инд.» в положение, обеспечивающее удобное время индикации. После прогрева прибора провести его калибровку. Для этого установить переключатель «род работы» в положение « $U - 0S$ », а переключатель «предел измерения» — в положение «10». Закоротить вход «100 VR» и ручкой  установить на индикаторном табло показания «0000» с равновесным изменением знака полярности; установить переключатель «род работы» в положение  и ручкой  (установка калибровки) установить на индикаторном табло показание, равное значению, указанному на шильдике вольтметра.

После калибровки для измерения напряжения постоянного тока следует установить переключатель «предел измерения» в положение, соответствующее величине измеряемого напряжения, а переключатель «род работы» — в положение « $U - 1S$ ». Подать измеряемое напряжение на гнезда  «100 VR» и «0», произвести отсчет показаний и рассчитать погрешность измерения по формуле (3.59). Следует помнить, что при появлении сигнала «П» на индикаторном табло переключатель «предел измерения» надо установить в положение высшего предела измерений.

Лицевая панель стробоскопического тахометра показана на рис. 3.11. Стробоскоп присоединяется к сети шнуром с левой стороны прибора. Включение прибора производится тумблером 5 с надписью «Сеть» (при этом загорается лампочка). Включение выносного импульсного осветителя, который присоединяется гибким шнуром к задней панели прибора, производится тумблером 6 с надписью «лампа». Зажигание осветителя производится тумблером 7. На шкале прибора имеются семь диапазонов (они обозначены буквами от А до Ж), на которые разделен весь интервал частот от 250 до 32 000 вспышек в минуту. Переключение диапазонов произво-

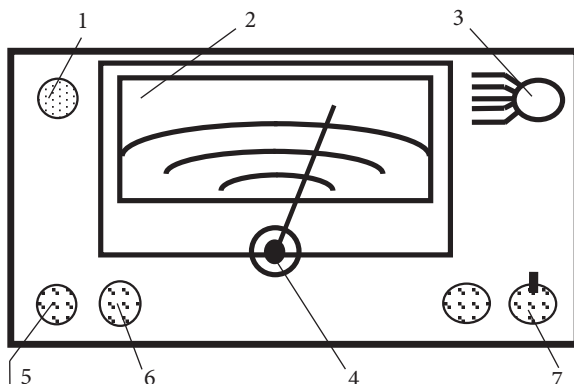


Рис. 3.11. Лицевая панель стробоскопического тахометра:  
1 — лампочка; 2 — шкала; 3 — тумблер; 4 — ручка; 5–7 — тумблеры

дится тумблером 3. Внутри каждого диапазона частоту изменяют с помощью ручки (верньера), расположенной под шкалой.

Измерение частоты вращения диска (точнее вала мотора, на котором укреплен диск) производится так. Осветив диск выносным осветителем, подбирают, вращая ручки 3 и 4, частоту вспышек так, чтобы белая черта на диске казалась неподвижной. Можно выбрать и такую частоту вспышек, при которой видно несколько неподвижных белых полос с одинаковыми углами между ними. В этом случае, если точно известно, что число вспышек больше числа оборотов, отсчитанная по прибору частота вспышек больше частоты вращения в число раз, равное количеству неподвижных полос.

В работе также используется цифровой тахометр ТЦ-3М. Пределы измерения его 10–20 000 об/мин, погрешность измерения числа оборотов  $\pm 3$  об/мин. Измерить число оборотов при помощи этого прибора чрезвычайно просто. На его табло, сразу после включения и 10-минутного прогрева, высвечивается периодически в течение 1 с значение числа оборотов в предыдущую секунду.



## Порядок выполнения работы и условия эксперимента

Перед началом выполнения работы следует внимательно ознакомиться с приборами.

1. Включите вольтметр в сеть и проведите калибровку прибора.
2. Включите выпрямительное устройство в сеть. Ручку выверните вращением против часовой стрелки в крайнее левое положение, включите выпрямитель тумблером 1. Поставьте тумблер 3 в положение «1 ступень» (1 ст.). Вращением ручки плавного изменения напряжения 2 приведите мотор во вращение. Убедитесь, что вращением этой ручки можно изменять частоту вращения мотора. По вольтметру следите за тем, чтобы напряжение не превышало 15 В.
3. Включите в сеть цифровой тахометр. Включите тумблер с надписью «Сеть».
4. Включите в сеть строботахометр. Включите тумблер 5 (рис. 3.11) с надписью «Сеть». Через несколько минут включите питание осветителя тумблером 6 с надписью «Лампа». Направив осветитель на вращающийся диск, изменяя частоту вспышек, наблюдайте стробоскопический эффект.
5. Проведите измерения частоты вращения вала мотора при помощи цифрового и стробоскопического тахометров в зависимости от приложенного к мотору напряжения. Для этого, изменяя напряжение, приложенное к электромотору от 5 до 15 В с шагом 1 В, проведите измерение частоты вращения вначале цифровым, а затем стробоскопическим тахометрами. При каждом значении напряжения, которое отсчитывается по вольтметру, необходимо провести не менее 5–7 измерений каждым способом. Результаты измерений числа оборотов удобно представить в виде таблицы (табл. 3.9).

## Обработка результатов эксперимента

В последних четырех столбцах табл. 3.9 приводятся расчетные величины — среднее значение частоты вращения  $\bar{n}$  при данном напряжении  $U$ , случайная погрешность измерений  $\Delta n$ , система-

тическая погрешность измерений  $\Delta_{\zeta} n$  и, наконец, полная погрешность. Величина  $\Delta n$  рассчитывается в соответствии с правилами обработки прямых измерений. Значение  $\Delta_{\zeta} n$  определяется по классу точности приборов. Класс точности строботахометра приведен на задней крышке прибора. Относительную допускаемую погрешность механического тахометра следует принять равной 5 %.

Таблица 3.9

Результаты измерений частоты вращения вала электромотора

U, В	Тахометр	н <sub>1</sub> , об/ мин	н <sub>2</sub> , об/ мин	н <sub>3</sub> , об/ мин	н <sub>4</sub> , об/ мин	н <sub>5</sub> , об/ мин	$\bar{n}$ , об/ мин	$\Delta n$ , об/ мин	$\Delta_{\zeta} n$ , об/ мин	$\Delta n$ , об/ мин
	Цифровой									
	Стробоскопический									

Для дальнейшего анализа экспериментальные результаты необходимо представить в виде графиков зависимости угловой скорости от напряжения  $U$  на электромоторе. Следует помнить, что экспериментальные точки на графиках должны иметь «размер». Он определяется погрешностями результатов измерений. В данной работе размер точек на графике по оси абсцисс равен погрешности результата измерения напряжения (она вычисляется по формуле (3.59)), а по оси ординат — погрешности определения угловой скорости. Таким образом, «точки» на графике экспериментальной зависимости должны представлять собой прямоугольную область, которая задается четырьмя точками:  $(U - \Delta U, \omega - \Delta \omega)$ ,  $(U - \Delta U, \omega + \Delta \omega)$ ,  $(U + \Delta U, \omega + \Delta \omega)$  и  $(U + \Delta U, \omega - \Delta \omega)$ . Понятно, что экспериментальные точки удобно изображать прямоугольниками или крестиками.

Прежде чем приступить к построению графиков, необходимо по данным табл. 3.9 рассчитать значения угловой скорости  $\omega$  и ее погрешности  $\Delta \omega$  и занести их в табл. 3.10, примерный вид которой приведен ниже.

Таблица 3.10

Значения угловой скорости  $\omega$  и ее погрешности  $\Delta\omega$ 

$U, В$	$\pm\Delta U, В$	Цифровой тахометр		Стробоскопический тахометр	
		$\omega, \text{рад/с}$	$\Delta\omega, \text{рад/с}$	$\omega, \text{рад/с}$	$\Delta\omega, \text{рад/с}$

Теперь необходимо проанализировать вид зависимости  $\omega = f(U)$ , а также сделать обоснованный вывод о степени соответствия результатов измерений, полученных разными способами.

### Контрольные вопросы и задания

1. Что такое угловая скорость и частота вращения? В каких единицах они измеряются?
2. В чем состоит стробоскопический эффект, используемый для измерения частоты вращения?
3. Каков будет стробоскопический эффект, если частота вспышек импульсного осветителя в полтора раза больше частоты вращения? В полтора раза меньше частоты вращения?

## Лабораторная работа 12

### Измерение параметров вращательного движения (маятник Обербека)

Цель работы:

- измерить параметры, характеризующие вращательное движение (момент силы, угловое ускорение и момент инерции) цилиндра, с помощью маятника Обербека;
- сравнить измеренное с помощью маятника Обербека значение момента инерции цилиндра с соответствующим значением момента инерции, полученного с помощью инструментальных измерений в рамках модели однородного тела.

#### Краткая теория

В данной работе используется установка, называемая маятником Обербека. Она позволяет изучать вращательное движение при различных значениях момента внешних сил и момента инерции системы.

Маятник Обербека (рис. 3.12) состоит из четырех одинаковых спиц, укрепленных на втулке под прямым углом друг к другу. На спицах могут быть укреплены одинаковые по форме и массе грузы (обычно грузы имеют форму цилиндров). На втулке намотана нить, которая перекинута через неподвижный блок. На конце нити можно укреплять гири известной массы.

Под действием момента силы натяжения нити  $\vec{T}$  вся система равноускоренно вращается вокруг горизонтальной оси  $Z$  с угловым ускорением  $\vec{\epsilon}$ . Силу натяжения нити можно варьировать, изменяя массу укрепленных на нити гирь. Величина углового ускорения зависит также от значения момента инерции системы относительно оси вращения (оси  $Z$ ).

В силу свойства аддитивности момент инерции системы  $J$  складывается из моментов инерции втулки и спиц  $J_0$  и моментов инерции четырех грузов, т. е.  $J = J_0 + J_1 + J_2 + J_3 + J_4$ . Если грузы имеют фор-

му цилиндров и расположены на одинаковом расстоянии  $l$  от оси вращения, то  $J_1 = J_2 = J_3 = J_4 = J_{\text{ц}}$ . Считая цилиндры материальными точками с массой  $\mu$  (это допустимо, если длина цилиндра  $L \ll l$ ), для момента инерции системы получаем

$$J = J_0 + 4\mu l^2. \quad (3.60)$$

Поскольку цилиндры имеют конечные размеры, то формула (3.60) верна лишь приближенно. Для получения точной формулы необходимо получить выражение для момента инерции прямого коаксиального цилиндра длиной  $L$ , имеющего внутренние и внешние радиусы  $r$  и  $R$  соответственно, центр масс которого расположен на расстоянии  $l$  от оси вращения  $Z$ , направленной перпендикулярно к оси цилиндра. Вначале следует получить выражение для момента инерции такого цилиндра относительно оси  $Z'$ , которая проходит через центр масс цилиндра параллельно оси вращения  $Z$  (рис. 3.12).

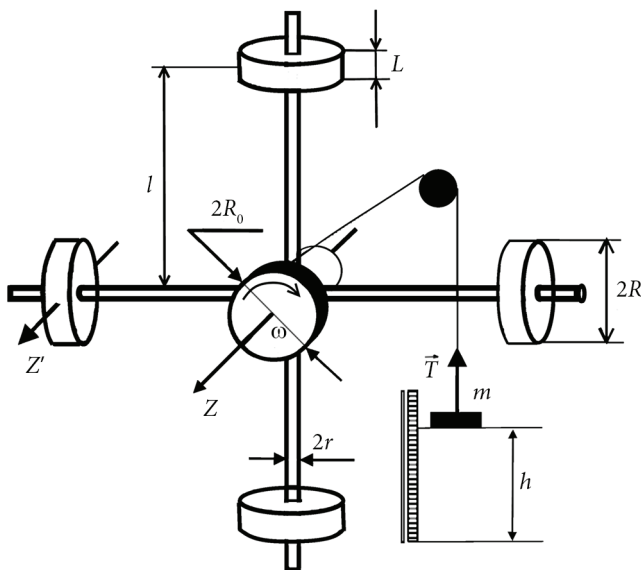


Рис. 3.12. Схема маятника Обербека

Вывод этого выражения базируется на формуле (3.19). В результате получается следующая формула для расчета  $J'_\text{ц}$  относительно оси  $Z'$ :

$$J'_\text{ц} = \mu \left( \frac{R^2 + r^2}{4} + \frac{L^2}{12} \right). \quad (3.61)$$

Формулу для момента инерции цилиндра  $J_\text{ц}$  относительно оси  $Z$  можно записать, используя теорему Штейнера о параллельном переносе осей (3.20):

$$J_\text{ц} = J'_\text{ц} + \mu l^2 = \mu \left( l^2 + \frac{R^2 + r^2}{4} + \frac{L^2}{12} \right). \quad (3.62)$$

Таким образом, чтобы определить момент инерции цилиндра относительно оси вращения  $Z$ , достаточно измерить его геометрические размеры и расстояние  $l$  от оси вращения до центра цилиндра. Измерение геометрических размеров цилиндра проводится штангенциркулем, а расстояние  $l$  — с помощью линейки с миллиметровой шкалой. Итак, можно считать, что погрешности  $\Delta_c r = \Delta_c R = \Delta_c L$  и равны цене деления нониуса штангенциркуля,  $\Delta_c l$  равна цене деления шкалы линейки. Масса  $\mu$  указана на самих цилиндрах, а погрешность  $\Delta_c \mu$  равна единице последнего знака указанного значения, т. е.  $\pm 1$  г.

Величину момента инерции одинаковых грузов, размещенных на одинаковых расстояниях от оси на спицах маятника Обербека, можно определить, если экспериментально определить момент инерции пустого (без грузов) маятника  $J_0$  и момент инерции нагруженного маятника  $J$ . Тогда разность этих величин даст суммарный момент инерции грузов, укрепленных на спицах. Этот способ применим для грузов произвольной формы, момент инерции которых невозможно рассчитать.

Для экспериментального определения значения момента инерции системы, состоящей из маятника Обербека и укрепленных на нем грузов, надо измерить угловое ускорение системы в зависимости от момента внешних сил. Эта связь, согласно формуле (3.17),

должна быть линейной с коэффициентом пропорциональности, равным моменту инерции системы  $J$ .

Момент силы натяжения  $\vec{T}$ , которая является внешней по отношению к рассматриваемой системе, равен  $M = R_0 T$ , так как угол между направлением действия силы  $\vec{T}$  и радиус-вектором  $\vec{R}_0$  точки приложения этой силы равен  $\pi/2$ . Для определения  $T$  запишем уравнение движения гири массой  $m$  (второй закон Ньютона), пренебрегая трением в блоке:

$$ma = mg - T, \quad (3.63)$$

где  $a$  — ускорение падающей гири. Отсюда  $T = m(g - a)$ , а момент силы натяжения есть

$$M = R_0 m(g - a). \quad (3.64)$$

Под действием этого момента силы система будет вращаться с возрастающей угловой скоростью, величину которой можно легко найти, применяя формулу (3.4) к точке приложения силы, находящейся на расстоянии  $R_0$  от оси вращения. Линейная скорость точки приложения силы равна  $v = \omega R_0$ . Линейное ускорение этой точки ( $a = dv/dt$ ) есть не что иное, как ускорение гири. Таким образом,  $a = dv/dt = R_0 (d\omega/dt)$ . Но  $(d\omega/dt) = \varepsilon$  есть угловое ускорение системы. Тогда

$$\varepsilon = \left( \frac{d\omega}{dt} \right) = \frac{a}{R_0}. \quad (3.65)$$

Из соотношений (3.64) и (3.65) видно, что для определения момента силы  $M$  и углового ускорения  $\varepsilon$  достаточно найти ускорение падающей гири, что можно сделать по формуле для перемещения при равноускоренном движении  $a = 2h/t^2$ , где  $h$  — расстояние, которое груз прошел за время падения  $t$ . Таким образом, выражения для определения  $M$  и  $\varepsilon$  приобретают следующий вид:

$$M = mR_0 \left( g - \frac{2h}{t^2} \right), \quad (3.66)$$

$$\varepsilon = \frac{2h}{R_0 t^2}. \quad (3.67)$$

Таким образом, измеряя время опускания  $t$  на определенное расстояние  $h$  при различных массах гирь  $m$ , можно, используя формулы (3.66) и (3.67), получить экспериментальную зависимость момента силы  $M$  от углового ускорения  $\varepsilon$ . Теоретическая зависимость  $M$  от  $\varepsilon$  определяется формулой (3.17).

Если учесть, что суммарный момент внешних сил включает в себя и момент сил трения ( $M_T$ ), то уравнение моментов примет следующий вид:

$$M = M_T + J \cdot \varepsilon. \quad (3.68)$$

Уравнение (3.68) — уравнение прямой, которая отсекает на оси  $Y$  отрезок, равный  $M_T$ , и имеет тангенс угла наклона к оси  $X$ , равный  $J$ . Численные значения  $M_T$  и  $J$  можно определить по экспериментальной зависимости  $M$  от  $\varepsilon$  методом наименьших квадратов, о котором подробно будет идти речь ниже.

### Методика эксперимента

В формулах (3.66) и (3.67) величины  $R_0$ ,  $m$ ,  $h$  и  $t$  есть результат прямых измерений, которые в данной лабораторной работе проводятся на установке, представляющей собой собранные на массивном основании колонку для крепления маятника Обербека и миллисекундомер. На колонке размещены два кронштейна с фотодатчиками (нижний кронштейн неподвижен, верхний может перемещаться вдоль колонки). На корпусе кронштейнов имеются отметки, расстояние между которыми можно отсчитать по миллиметровой шкале, нанесенной на колонке. Это расстояние есть не что иное, как величина  $h$ . Погрешность определения высоты падения составляет  $\Delta h = \pm 1$  мм.

В верхней части колонки закреплен блок, через который перекинута нить. К одному концу прикрепляются гири, на которых



указана их масса. Погрешность определения массы  $\Delta m = \pm 0,1$  г. Другой конец нити наматывается на диск, жестко скрепленный с крестовиной маятника Обербека. Диаметр диска, равный  $2R_0$ , измеряется штангенциркулем. Вся система может удерживаться в покое при помощи электромагнита и фрикционной муфты.

На лицевой стороне панели миллисекундомера расположены:

- клавиша «Сеть» — включатель сети. При нажатии этой клавиши на световом табло должны высвечиваться нули и должны гореть лампочки фотодатчиков;

- клавиша «Сброс» — сброс показаний секундомера. Нажатие этой клавиши вызывает обнуление схем секундомера;

- клавиша «Пуск» — управление электромагнитом. Нажатие ее вызывает освобождение электромагнита и генерирование импульса, разрешающего измерение.

Установка включается клавишей «Сеть». Гирия устанавливается так, чтобы нижний ее край совпадал с чертой на корпусе верхнего фотодатчика. При отжатой клавише «Пуск» вся система фиксируется электромагнитом. Нажатие этой клавиши отключает питание электромагнита, и гирия начинает движение. В момент перекрывания светового потока, падающего на фоторезистор верхнего фотодатчика, генерируется электрический импульс, который подключает к счетчику времени кварцевый генератор. Счетчик подсчитывает число импульсов, следующих с кварцевого генератора с частотой 10 кГц. Счет продолжается до тех пор, пока при своем движении нижний край гири не перекроет световой поток нижнего фотодатчика. В этот момент генерируется импульс, отключающий счетчик от кварцевого генератора и включающий питание электромагнита. Относительная погрешность измерения времени составляет  $\pm 0,02$  %.

## Порядок выполнения работы и условия эксперимента

1. Снять цилиндры со спиц маятника Обербека. Штангенциркулем измерить их геометрические размеры. Результаты занести в табл. 3.11.

Таблица 3.11

Измерение геометрических размеров цилиндров с помощью  
штангенциркуля с ценой деления нониуса ... мм

№ п/п	$R$ , мм	$r$ , мм	$L$ , мм
1			
2...			

2. Отрегулировать установку, чтобы колонка была вертикальной. Верхний кронштейн установить на выбранную высоту так, чтобы гири, падая, проходили через середину рабочих окон фотодатчика. По шкале, расположенной на колонке, отсчитать значение  $h$ . Измерить штангенциркулем диаметр диска ( $2R_0$ ), на который наматывается нить. Результаты записать в табл. 3.12.

Таблица 3.12

Измерение радиуса диска с помощью штангенциркуля  
с ценой деления нониуса ... мм

№ п/п	$R_0$ , мм
1	
2...	

3. Оценить момент сил трения  $M_T$ . Для этого максимальную массу гири  $m_0$  необходимо подобрать такой, чтобы маятник был еще неподвижным. Очевидно, что в этом случае  $M_T = m_0 g R_0$ .

4. Определить экспериментальную зависимость углового ускорения  $\varepsilon$  от момента внешних сил  $M$  для пустого маятника. Для этого надо измерить время  $t$ , за которое гиря массой  $m$  опускается с высоты  $h$ . Это измерение надо проводить при различных массах

гирь, причем при каждом значении  $m$  измерение  $t$  провести 3 раза. Результаты измерений представить в виде табл. 3.13.

Таблица 3.13

Экспериментальная зависимость углового ускорения  $\varepsilon$   
от момента внешних сил  $M$

$h, \text{ м}$	$m, \text{ кг}$	$t_1, \text{ с}$	$t_2, \text{ с}$	$t_3, \text{ с}$	$\bar{t}, \text{ с}$	$\Delta t, \text{ с}$	$\varepsilon, 1/\text{с}^2$	$M, \text{ Н} \cdot \text{ м}$

В этой таблице значения  $\varepsilon$  и  $M$  рассчитываются по формулам (3.66) и (3.67).

5. Оценить случайные и систематические составляющие погрешностей  $\varepsilon$  и  $M$ .

6. Построить экспериментальные точки в координатной плоскости  $X = \varepsilon$  и  $Y = M$ . Проведя по этим точкам «наилучшую прямую», оценить величины момента инерции и момента сил трения для пустого маятника. Окончательную обработку этой зависимости провести, используя метод наименьших квадратов.

7. Разместить цилиндры на минимальном расстоянии. Измерить это расстояние ( $l_{\min}$ ). Рассчитать величину момента инерции цилиндра в данном случае ( $J_{\text{ц}}^{\min}$ ) по формуле (3.62). Рассчитать погрешность определения этой величины ( $\Delta J_{\text{ц}}^{\min}$ ). Определить экспериментальную зависимость  $\varepsilon$  от  $M$  и провести ее обработку так же, как в п. 4. Результаты измерений представить в виде таблицы, аналогичной 3.13.

8. Разместить цилиндры на максимальном расстоянии. Измерить это расстояние ( $l_{\max}$ ). Рассчитать величину момента инерции цилиндра в этом случае ( $J_{\text{ц}}^{\max}$ ) по формуле (3.62). Рассчитать погрешность определения этой величины ( $\Delta J_{\text{ц}}^{\max}$ ). Определить экспериментальную зависимость  $\varepsilon$  от  $M$  и провести ее обработку так же, как в п. 4. Результаты измерений представить в виде таблицы, аналогичной 3.13.

## Обработка результатов эксперимента

Для того чтобы корректно сравнить величины моментов инерции цилиндра, полученные по формуле (3.62) и методом наименьших квадратов при обработке экспериментальных зависимостей  $\varepsilon$  от  $M$ , необходимо рассчитать погрешности определения этих величин.

Значения моментов инерции  $J_{\text{ц}}^{\min}$  и  $J_{\text{ц}}^{\max}$ , полученные в результате расчета по формуле (3.62), отягощены погрешностями, поскольку величины, входящие в эту формулу, определены неточно. Эти погрешности рассчитываются как погрешности косвенных измерений, т. е.

$$\begin{aligned} \Delta J_{\text{ц}} &= \sqrt{\left(\frac{\partial J_{\text{ц}}}{\partial \mu} \Delta \mu\right)^2 + \left(\frac{\partial J_{\text{ц}}}{\partial l} \Delta l\right)^2 + \left(\frac{\partial J_{\text{ц}}}{\partial R} \Delta R\right)^2 + \left(\frac{\partial J_{\text{ц}}}{\partial r} \Delta r\right)^2 + \left(\frac{\partial J_{\text{ц}}}{\partial L} \Delta L\right)^2} = \\ &= \sqrt{\left[\left(l^2 + \frac{R^2 + r^2}{4} + \frac{L^2}{12}\right) \Delta \mu\right]^2 +} \\ &\quad + 4\mu^2 \left[ (l \Delta l)^2 + \frac{(R \Delta R)^2 + (r \Delta r)^2}{4^2} + \frac{(L \Delta L)^2}{12^2} \right]. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Здесь  $\Delta \mu$ ,  $\Delta l$ ,  $\Delta R$ ,  $\Delta r$  и  $\Delta L$  — полные погрешности измерения этих величин.

Прежде чем приступить к построению экспериментальных точек, необходимо оценить погрешности определения величин  $\varepsilon$  и  $M$ , которые рассчитываются по формулам (3.66) и (3.67). Измерение  $\varepsilon$  и  $M$  есть измерения косвенные. Тогда, пренебрегая погрешностью  $g$  по сравнению с погрешностями других величин, получаем

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon &= \sqrt{\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial R_0} \Delta R_0\right)^2 + \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial h} \Delta h\right)^2 + \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \Delta t\right)^2} = \\ &= \varepsilon \sqrt{\left(\frac{\Delta R_0}{R_0}\right)^2 + \left(\frac{\Delta h}{h}\right)^2 + 4 \left(\frac{\Delta t}{t}\right)^2}, \end{aligned} \quad (3.70)$$

$$\begin{aligned}\Delta M &= \sqrt{\left(\frac{\partial M}{\partial R_0} \Delta R_0\right)^2 + \left(\frac{\partial M}{\partial m} \Delta m\right)^2 + \left(\frac{\partial M}{\partial h} \Delta h\right)^2 + \left(\frac{\partial M}{\partial t} \Delta t\right)^2} = \\ &= M \sqrt{\left(\frac{\Delta R_0}{R_0}\right)^2 + \left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{2h}{gt^2 - 2h}\right)^2 \left[\left(\frac{\Delta h}{h}\right)^2 + 4\left(\frac{\Delta t}{t}\right)^2\right]}. \quad (3.71)\end{aligned}$$

Подстановка в эти формулы систематических погрешностей прямых измерений величин  $R_0$ ,  $m$ ,  $h$  и  $t$  позволяет определить систематические составляющие погрешностей  $\varepsilon$  и  $M$ .

При расчете случайных составляющих погрешности этих величин формулы (3.70) и (3.71) существенно упрощаются, так как учитывается лишь случайная погрешность измерения времени, т. е.

$$\overset{\circ}{\Delta} \varepsilon = 2\varepsilon \frac{\overset{\circ}{\Delta} t}{t}, \quad \overset{\circ}{\Delta} M = M \frac{4h}{gt^2 - 2h} \frac{\overset{\circ}{\Delta} t}{t}.$$

Поскольку необходимо лишь оценить величины погрешностей, достаточно рассчитать только максимальные значения  $\Delta M$  и  $\Delta \varepsilon$ .

Приближенно величины параметров  $J$  и  $M_T$  можно определить графическим способом. Для этого необходимо на миллиметровой бумаге изобразить координатные оси. По оси абсцисс будем в определенном масштабе откладывать величину  $\varepsilon$ , а по оси ординат — величину  $M$ . В этих координатных осях следует построить экспериментальные точки  $(\varepsilon_r, M_r)$ . Согласно формуле (3.68) зависимость  $M$  от  $\varepsilon$  линейна. Тогда, проведя по экспериментальным точкам «наилучшую прямую», можно найти тангенс угла наклона этой прямой, который равен, очевидно,  $J$ . Отсекаемая «наилучшей прямой» на оси ординат часть будет равна  $M_T$ .

В первом приближении «наилучшей прямой» можно считать такую прямую, относительно которой экспериментальные точки расположены симметрично по обе стороны от нее. Нечто похожее представлено на рис. 3.13.

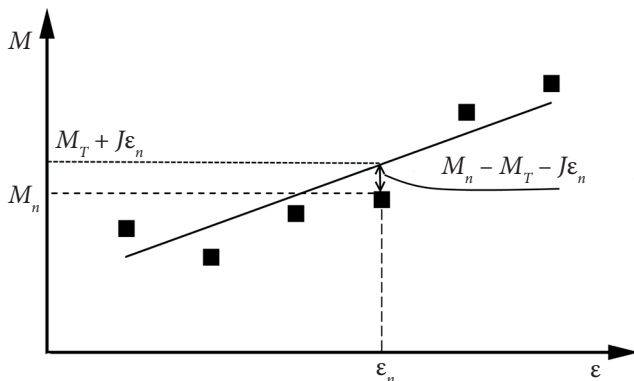


Рис. 3.13. Пример построения «наилучшей прямой» для экспериментальной зависимости момента силы  $M$  от углового ускорения  $\varepsilon$

Такую прямую можно провести, используя прозрачную линейку. Более точно понятие «наилучшая прямая» определяется в методе наименьших квадратов.

Строго говоря, задача о нахождении наилучших оценок истинных значений  $J$  и  $M_T$  по данным эксперимента и известной зависимости  $M = M_T + J\varepsilon$  ставится так: необходимо найти значения  $J$  и  $M_T$ , при которых функция  $M = M_T + J\varepsilon$  наилучшим образом соответствует опытным данным. Рассмотрим подробнее смысл выражения «наилучшим образом».

Выберем за меру отклонения функции от экспериментальных данных для  $n$ -го опыта величину  $(M_n - M_T - J\varepsilon_n)^2$  (рис. 3.13). Если бы за меру отклонения мы взяли  $(M_n - M_T - J\varepsilon_n)$ , а затем стали бы находить сумму отклонений в нескольких опытах, то могли бы получить весьма малую величину за счет взаимного уничтожения отдельных слагаемых большой величины, но разных знаков. Однако это вовсе не означало бы, что величина  $M = M_T + J\varepsilon$  измерена с высокой точностью. Если за меру отклонения взять величину  $(M_n - M_T - J\varepsilon_n)^2$ , то такого взаимного уничтожения не будет, так как все величины положительны  $(M_n - M_T - J\varepsilon_n)^2 > 0$ . Итак, в качестве

меры общего отклонения  $S_0$  в описании экспериментальных данных функцией  $M = M_T + J\varepsilon$  необходимо взять сумму мер отклонений для всех опытов, т. е.

$$S_0 = \sum_{n=1}^p (M_n - M_T - J\varepsilon_n)^2. \quad (3.72)$$

Таким образом, функция  $M = M_T + J\varepsilon$  будет наилучшим образом соответствовать опытным данным, если  $S_0$ , а именно сумма квадратов отдельных отклонений, будет минимальна. Метод определения констант, входящих в формулу, из требования минимальности  $S_0$ , называется *методом наименьших квадратов*.

В формуле (3.72) роль неизвестных констант играют величины  $J$  и  $M_T$ , т. е.  $S_0 = S_0(J, M_T)$ . Надо выбрать значения  $J$  и  $M_T$  так, чтобы величина  $S_0$  была наименьшей. Если бы  $M_T$  было уже найдено, то  $S_0$  зависело бы только от  $J$ , т. е.  $S_0 = S_0(J)$ . Поэтому величина  $S_0$  была бы наименьшей при таком  $J$ , при котором  $\partial S_0 / \partial J = 0$ . То есть должно было бы быть

$$\frac{\partial S_0}{\partial J} = -2 \sum_{n=1}^p (M_n - M_T - J\varepsilon_n)(-\varepsilon_n) = 0.$$

С другой стороны, если бы уже было найдено  $J$ , то должно было бы выполняться следующее равенство:

$$\frac{\partial S_0}{\partial M_T} = -2 \sum_{n=1}^p (M_n - M_T - J\varepsilon_n) = 0.$$

Эти условия дают следующую систему уравнений для определения величин момента инерции  $J$  и момента силы  $M_T$ :

$$\begin{aligned} J \sum_{n=1}^p \varepsilon_n^2 + M_T \sum_{n=1}^p \varepsilon_n &= \sum_{n=1}^p M_n \varepsilon_n, \\ J \sum_{n=1}^p \varepsilon_n + p M_T &= \sum_{n=1}^p M_n \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} b_1 J + b_0 M_T &= r_1, \\ b_0 J + p M_T &= r_0. \end{aligned} \quad (3.73)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$b_0 = \sum_{n=1}^p \varepsilon_n, \quad b_1 = \sum_{n=1}^p \varepsilon_n^2, \quad r_0 = \sum_{n=1}^p M_n, \quad r_1 = \sum_{n=1}^p M_n \varepsilon_n.$$

Эти величины легко вычисляются по экспериментальным данным.

Решая систему уравнений (3.73), получим

$$J = \frac{p r_1 - r_0 b_0}{p b_1 - b_0^2}, \quad M_T = \frac{r_0 b_1 - r_1 b_0}{p b_1 - b_0^2} = \frac{r_0 - b_0 J}{p}. \quad (3.74)$$

Зная значения  $J$  и  $M_T$ , можно рассчитать среднеквадратичное отклонение  $S$ , которое характеризует среднюю степень отклонения экспериментальных результатов от прямой  $M = M_T + J\varepsilon$ .

$$S = \sqrt{\sum_{n=1}^p \frac{(M_n - M_T - J\varepsilon_n)^2}{p-2}}. \quad (3.75)$$

Среднеквадратичные отклонения величин  $J$  и  $M_T$  определяются по следующим формулам:

$$S_J = S \sqrt{\frac{p}{p b_1 - b_0^2}}, \quad S_{M_T} = S \sqrt{\frac{b_1}{p}}. \quad (3.76)$$

Наконец, доверительные интервалы для  $J$  и  $M_T$  при выбранной доверительной вероятности  $P$  рассчитываются следующим образом:

$$\Delta J = t_{\frac{1+P}{2}, p-2} S_J, \quad \Delta M_T = t_{\frac{1+P}{2}, p-2} S_{M_T}, \quad (3.77)$$

т. е. коэффициент Стьюдента выбирается по таблице для эффективной вероятности  $(1+P)/2$  и для числа точек на два меньшего, чем количество экспериментальных точек.



Например, если надо найти доверительные интервалы при выбранной доверительной вероятности  $P = 0,90$  для параметров  $J$  и  $M_{\Gamma}$ , полученных при обработке 10 точек ( $p = 10$ ), то в формулу (3.77) должно подставляться значение коэффициента Стьюдента  $t_{0,95, 8}$ .

Итак, имеющиеся в распоряжении три экспериментальные зависимости  $M$  от  $\varepsilon$  следует обработать методом наименьших квадратов, применяя формулы (3.74)–(3.77). Используя полученные значения моментов инерции системы и моментов сил трения, надо построить «наилучшие прямые» и сравнить их с соответствующими экспериментальными зависимостями.

Далее необходимо рассчитать величины  $J_{\text{ц}}^{\min}$  и  $J_{\text{ц}}^{\max}$ , а также их погрешности. Это, очевидно, можно сделать по следующим формулам:

$$J_{\text{ц}} = \frac{J - J_0}{4}, \quad \Delta J_{\text{ц}} = \frac{1}{4} \sqrt{(\Delta J)^2 + (\Delta J_0)^2}. \quad (3.78)$$

Здесь  $J_0$  и  $\Delta J_0$  — значение момента инерции и погрешность этой величины для маятника без грузов. Подставляя в (3.78) вместо  $J$  и  $\Delta J$  значения момента инерции и его погрешности, рассчитанные по методу наименьших квадратов для маятника Обербека при максимальном расстоянии между грузами, получаем  $J_{\text{ц}}^{\max}$  и  $\Delta J_{\text{ц}}^{\max}$ . Аналогично получают значения  $J_{\text{ц}}^{\min}$  и  $\Delta J_{\text{ц}}^{\min}$ .

Теперь можно провести корректное сравнение полученных значений момента инерции со значениями  $J_{\text{ц}}^{\min}$  и  $J_{\text{ц}}^{\max}$ , рассчитанными по формуле (3.62).

### Контрольные вопросы и задания

1. Перечислите параметры, характеризующие вращательное движение, и дайте определение каждого из них.
2. Как устроен маятник Обербека?
3. Дайте определение момента инерции тела относительно оси.
4. Запишите выражение для момента инерции обруча, диска, шара и стержня относительно центра масс.

5. Сформулируйте теорему Штейнера.
6. Выведите и сформулируйте основное уравнение динамики вращательного движения.
7. Как определить направление момента силы и момента импульса?

## Лабораторная работа 13

### Изучение движения маятника Максвелла

Цель работы:

- ознакомиться с плоским движением твердого тела на примере маятника Максвелла;
- экспериментально определить значение момента инерции тела вращения с помощью маятника Максвелла;
- провести сравнение измеренных значений со значениями момента инерции, полученного с помощью инструментальных измерений в рамках модели однородного тела.

#### Краткая теория

Маятник Максвелла представляет собой однородный металлический диск, в середине которого укреплен металлический стержень. К концам этого стержня прикреплены две крепкие нити, которые тщательно (виток к витку) наматываются на стержень (от концов его к диску).

При отпускании маятника он начинает движение: вращательное вокруг своей оси симметрии и поступательное — вниз. При этом траектории всех точек маятника располагаются в параллельных друг другу плоскостях. Такое движение тела является плоским.

В нижней точке вращение продолжается по инерции и приводит вновь к наматыванию нити на стержень и тем самым к подъему маятника. Движение маятника после этого замедляется, маятник останавливается, снова начинает свое движение вниз и т. д.

На примере маятника Максвелла можно демонстрировать закон сохранения механической энергии. Если силы сопротивления пренебрежимо малы, то при движении вниз потенциальная энергия маятника уменьшается и переходит в кинетическую энергию поступательного и вращательного движения. В нижней точке, где поступательная скорость обращается в ноль, энергия равна только кинетической энергии вращательного движения.

Уравнения движения маятника без учета сил трения имеют вид

$$ma = mg - 2T, \quad (3.79)$$

$$J\varepsilon = 2Tr_0, \quad (3.80)$$

$$a = \varepsilon r_0, \quad (3.81)$$

где  $m$  — масса маятника;  $J$  — момент инерции маятника;  $g$  — ускорение свободного падения;  $r_0$  — радиус стержня;  $T$  — натяжение нити (одной);  $a$  — ускорение поступательного движения центра масс;  $\varepsilon$  — угловое ускорение маятника.

Ускорение  $a$  может быть получено по измеренному времени движения  $t$  и проходимому расстоянию  $h$  из уравнения

$$a = \frac{2h}{t^2}. \quad (3.82)$$

Уравнения (3.79)–(3.81) позволяют получить выражение для силы натяжения нитей и момента инерции

$$2T = m(g - a), \quad (3.83)$$

$$J = \frac{2T}{a} r_0^2. \quad (3.84)$$

Пользуясь этими уравнениями, определяют момент инерции маятника Максвелла. Натяжение нитей при движении маятника можно вычислить из уравнения (3.83), зная ускорение  $a$  или измеряя его непосредственно в эксперименте.

### Методика эксперимента

Используемая в настоящей работе установка представлена на рис. 3.14 и включает основание, вертикальную стойку, верхний кронштейн, кронштейн для установки фотодатчика, фотодатчик,

диск с осью, подвешенной на двух нитях, комплект из трех сменных колец с различными моментами инерции. Основание снабжено тремя регулируемыми опорами и зажимом для фиксации вертикальной стойки. Вертикальная стойка имеет миллиметровую шкалу и визир. На верхнем кронштейне размещаются электромагниты и узел для регулировки исходного положения маятника. Кронштейн 4 имеет зажим для крепления на вертикальной стойке и элементы фиксации фотодатчика.

Так как момент инерции, ускорение и сила натяжения нитей являются косвенно измеряемыми величинами (выражения (3.82)–

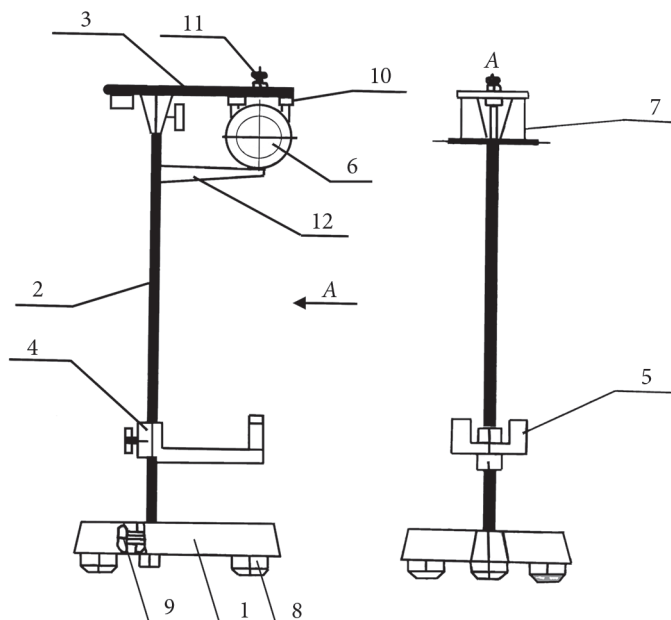


Рис. 3.14. Схема экспериментальной установки маятника Максвелла:

- 1 — основание; 2 — вертикальная стойка; 3 — верхний кронштейн;
- 4 — кронштейн для установки фотодатчика; 5 — фотодатчик; 6 — диск;
- 7 — нить; 8 — регулируемые опоры; 9 — зажим; 10 — электромагниты;
- 11 — узел регулировки нити; 12 — визир

(3.84)), то погрешности в этом случае будут рассчитываться по следующим формулам:

$$\frac{\Delta J}{J} = \pm \sqrt{\left(\frac{\Delta T}{T}\right)^2 + \left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{\Delta r_0}{r_0}\right)^2}, \quad (3.85)$$

$$\frac{\Delta a}{a} = \pm \sqrt{\left(\frac{\Delta h}{h}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{\Delta t}{t}\right)^2}, \quad (3.86)$$

$$\frac{\Delta T}{T} = \pm \sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \frac{(\Delta g)^2 + (\Delta a)^2}{(g - a)^2}}. \quad (3.87)$$

**Определение значения момента инерции кольца с помощью инструментальных измерений.** Расчет момента инерции однородного кольца производится в соответствии с формулой

$$J = \frac{1}{2} m_{\kappa} (R^2 + r^2), \quad (3.88)$$

где  $R$  и  $r$  — внешний и внутренний радиусы кольца;  $m_{\kappa}$  — масса кольца, выраженная в килограммах. Массы сменных колец —  $m_{\kappa 1}$ ,  $m_{\kappa 2}$ ,  $m_{\kappa 3}$  — указаны непосредственно на кольцах или определяются взвешиванием.

Итак, зная массу кольца, а также его внутренний и внешний диаметр, можно определить его момент инерции относительно оси симметрии.

Формула для расчета погрешности измерения методом, использующим формулу (3.88), имеет вид

$$\frac{\Delta J}{J} = \sqrt{\left(\frac{\Delta m_{\kappa}}{m_{\kappa}}\right)^2 + 4 \cdot \frac{(r \Delta r)^2 + (R \Delta R)^2}{(r^2 + R^2)^2}}. \quad (3.89)$$

**Экспериментальное определение ускорения поступательного движения центра тяжести и момента инерции кольца с помощью маятника Максвелла.** Момент инерции маятника складывается из моментов инерции кольца и платформы. Поэтому для определения момента инерции кольца следует из момента инерции маятника вычесть момент инерции платформы.

Для определения момента инерции платформы необходимо снять кольцо с платформы и для пустой платформы провести соответствующие измерения. Поскольку платформа не является магнитной, то при измерениях используется ее ручная фиксация. Определить момент инерции кольца и погрешность его измерения. Провести сравнения с моментом инерции кольца, полученным с помощью инструментальных измерений.

Масса платформы (диск + ось)  $m_0 = (100,9 \pm 0,1)$  г.

#### Порядок выполнения работы и условия эксперимента

1. Установить нижний кронштейн с фотодатчиком в крайнее нижнее положение шкалы так, чтобы плоскость кронштейна, окрашенная в синий цвет, совпала с одной из рисок шкалы.

2. Разместить диск на бифилярном подвесе в центре окна фотодатчика, для чего произвести регулировку положения основания при помощи регулировочных опор.

3. Установить с помощью узла регулировки 11 (рис. 3.14) необходимую длину бифилярного подвеса таким образом, чтобы нижний край среза сменного кольца маятника находился на 4–5 мм ниже оптической оси фотодатчика, при этом ось маятника должна занимать горизонтальное положение.

4. Нажать кнопку «Сеть». При этом должны включиться электромагниты и табло индикации.

5. Вращая маятник по часовой стрелке (рис. 3.14), зафиксировать его в верхнем положении при помощи левого (ближнего к стойке) электромагнита. Необходимо следить за тем, чтобы нить наматыва-

лась на ось виток к витку. При вращении маятника против часовой стрелки фиксировать его необходимо при помощи правого (дальнего от стойки) электромагнита.

6. Нажать кнопку «Сброс» для того, чтобы убедиться, что на табло устанавливаются нули.

7. При нажатии кнопки «Пуск» на блоке электромагниты должны обесточиться, маятник должен начать раскручиваться, таймер должен произвести отсчет времени, а в момент пересечения маятником оптической оси фотодатчика отсчет времени должен прекратиться.

8. При помощи визира по шкале вертикальной стойки определить ход маятника  $h$ .

9. Нажать кнопку «Сброс». Привести маятник в исходное положение и при помощи электромагнита зафиксировать в верхнем положении.

10. Нажать кнопку «Пуск» на блоке. Записать показание таймера, т. е. время хода маятника, в табл. 3.14.

Таблица 3.14

Измерение времени хода маятника Максвелла при  $h = \dots$  м

№ п/п	$t$ , с
1	
2	

11. Определить экспериментальное значение ускорения по формуле (3.82).

12. Последовательность действий, описанную в пп. 8–11, необходимо выполнить для пустой платформы и маятника с кольцом.

13. Провести измерения внутреннего ( $d$ ) и внешнего ( $D$ ) диаметров кольца с помощью штангенциркуля. Измерение проводить не менее 5 раз. Данные занести в табл. 3.15. Рассчитать среднее значение  $D$ ,  $d$ , их случайные и систематические погрешности.

14. Провести измерения диаметра оси маятника Максвелла ( $d_0$ ) с помощью микрометра. Измерение проводить не менее 5 раз.



Данные занести в табл. 3.16. Рассчитать среднее значение  $d_0$ , его случайную и систематическую погрешность.

Таблица 3.15

Измерение внутреннего и внешнего диаметров кольца  
с помощью штангенциркуля

№ п/п	$D$ , мм	$d$ , мм
1		
2		

Таблица 3.16

Измерение диаметра оси маятника Максвелла ( $d_0$ )  
с помощью микрометра

№ п/п	$d_0$ , мм
1	
2	

### Обработка результатов эксперимента

1. С помощью формул (3.83) и (3.84) определить экспериментальное значение момента инерции маятника и платформы.
2. Оценить погрешности измерений экспериментального значения момента инерции маятника и платформы, используя формулы (3.85)–(3.87).
3. Определить момент инерции кольца, для чего из момента инерции маятника следует вычесть момент инерции платформы.
4. Вычислить погрешность определения момента инерции кольца.
5. Рассчитать момент инерции кольца по формуле (3.88), используя значения геометрических размеров кольца и его массы.
6. Оценить погрешность измерения момента инерции кольца, используя формулу (3.89).
7. Сравнить значения момента инерции кольца, полученные разными методами.

## Контрольные вопросы и задания

1. Что называется ускорением силы тяжести? Как оно направлено и от чего зависит?
2. Что собой представляет маятник Максвелла? Какой вид движения тела он демонстрирует?
3. Как в данной работе экспериментально определяется момент инерции маятника Максвелла?
4. Дайте определение момента инерции тела относительно оси.
5. Чему равен момент инерции обруча, диска, шара и стержня относительно центра масс?
6. Сформулируйте теорему Штейнера.
7. Выведите и сформулируйте основное уравнение динамики вращательного движения.

## 4. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В МЕХАНИКЕ

### 4.1. Энергия и законы сохранения

Тела, образующие механическую систему, могут взаимодействовать как между собой, так и с телами, не принадлежащими данной системе. В соответствии с этим силы, действующие на тела системы, можно подразделить на внутренние и внешние. *Внутренними* называются силы, действующие на данное тело со стороны других тел, входящих в систему; *внешними* — силы, действующие со стороны тел, не входящих в данную систему.

Механическая система тел, на которую не действуют внешние силы, называется *замкнутой*. Замкнутыми системы тел могут быть только приближенно, когда можно пренебречь внешними взаимодействиями по сравнению с внутренними.

Для замкнутых систем существуют такие функции координат и скоростей тел (материальных точек), образующих систему, которые сохраняют при движении постоянные значения. Эти функции называются *интегралами движения*.

Для системы  $n$  материальных точек, между которыми нет жестких связей, можно образовать  $(6n - 1)$  интегралов движения. Однако интерес представляют только те из них, которые обладают

свойством аддитивности. Это свойство заключается в том, что, если пренебречь взаимодействием отдельных подсистем (частей), входящих в систему, то общий интеграл движения системы будет равен сумме интегралов движения ее отдельных подсистем (частей).

Аддитивных интегралов движения три: импульс, энергия, момент импульса. Таким образом, для замкнутых систем неизменными являются три перечисленные физические величины. В соответствии с этим имеют место три закона сохранения: законы сохранения импульса, энергии и момента импульса.

**Закон сохранения импульса.** В инерциальной системе отсчета импульс замкнутой механической системы остается постоянным

во времени:  $\vec{p} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = \text{const}$ , где  $m$  — масса;  $\vec{v}$  — скорость движения объектов, входящих в систему.

Закон сохранения импульса — фундаментальный закон природы, он связан с однородностью пространства, заключающейся в том, что законы движения замкнутой системы тел не зависят от выбора положения начала координат инерциальной системы, так как все точки пространства равноправны по своим физическим свойствам.

**Кинетическая энергия тела** — мера его механического движения. Она определяется работой, которую необходимо совершить, чтобы вызвать данное движение. Величина  $T = mv^2/2$  называется кинетической энергией тела массой  $m$ , движущегося со скоростью  $\vec{v}$ .

Кинетическая энергия является величиной аддитивной: кинетическая энергия механической системы равна сумме кинетических энергий всех частей этой системы.

**Потенциальная энергия** — часть общей механической энергии системы, определяемая взаимным расположением тел и характером взаимодействия между ними. Потенциальная энергия  $U$  вводится тогда, когда взаимодействие тел осуществляется посредством силовых полей (поле упругих сил, гравитационное поле, электрическое поле и т. д.), характеризующихся тем, что работа, совершаемая

действующими в них силами при перемещении центра масс тела из одной точки в другую, не зависит от того, по какой траектории это перемещение произошло, а определяется только начальным и конечным положением тела. Такие поля называются потенциальными, а силы, действующие в них, — консервативными.

Например, потенциальная энергия тела массой  $m$ , поднятого над поверхностью Земли на высоту  $h$ , меньшую радиуса Земли, записывается как  $U = mgh$ .

**Полная механическая энергия системы.** Вычисляется как  $W = T + U$ , т. е. равна сумме кинетической и потенциальной энергий.

Изменение полной механической энергии системы при переходе из состояния 1 в какое-либо состояние 2 равно работе, совершенной при этом всеми неконсервативными силами, действующими на систему.

**Закон сохранения механической энергии.** Если рассматриваемая система тел (материальных точек) замкнутая и между телами системы действуют только консервативные силы, то полная энергия системы остается постоянной:  $W = T + U = \text{const}$ . Данное выражение представляет собой *закон сохранения механической энергии*: в инерциальной системе отсчета полная механическая энергия замкнутой системы тел, между которыми действуют только консервативные силы, сохраняется, т. е. не изменяется со временем.

Закон сохранения механической энергии связан с однородностью времени, заключающейся в том, что законы движения замкнутой системы тел не зависят от выбора начала отсчета времени, так как все моменты времени равноправны по своим физическим свойствам (нет выделенных моментов).

Кроме консервативных существует еще один вид механических систем — диссипативные системы, в которых механическая энергия уменьшается за счет преобразования в другие (немеханические) виды энергии. Строго говоря, в природе все системы являются диссипативными. Например, в замкнутой системе, в которой действуют силы трения, полная механическая энергия в процессе движения тел,

входящих в систему, убывает. При этом возникает эквивалентное количество энергии другого вида, например, тепловой.

Таким образом, энергия никогда не исчезает и не появляется вновь, она лишь превращается из одного вида в другой. Это есть общефизический закон сохранения энергии.

### **Закон изменения момента импульса механической системы.**

В инерциальной системе отсчета производная по времени от момента импульса системы относительно неподвижной точки равна суммарному моменту относительно той же точки всех внешних сил, действующих на систему:  $d\vec{L}/dt = \vec{M}_{\text{внеш}}$ .

**Закон сохранения момента импульса.** Для замкнутой системы суммарный момент внешних сил всегда равен нулю. В результате из закона изменения момента импульса вытекает *закон сохранения момента импульса* системы материальных точек:  $d\vec{L}/dt = 0$  и  $\vec{L} = \text{const}$ , который формулируется следующим образом: в инерциальной системе отсчета момент импульса замкнутой системы относительно неподвижной точки не изменяется с течением времени.

Подобно законам сохранения импульса и энергии закон сохранения момента импульса принадлежит к числу фундаментальных законов природы, которые далеко выходят за рамки ньютоновской механики. Этот закон связан с симметрией пространства — его изотропностью, которая заключается в том, что физические свойства и законы движения замкнутой системы не изменяются при ее повороте в пространстве как единого целого на любой угол, т. е. не зависят от выбора направления осей координат инерциальной системы отсчета (нет выделенных направлений в пространстве).

## 4.2. Механический удар

Примером реальной физической задачи, демонстрирующей выполнение законов сохранения импульса и энергии, является удар абсолютно упругих и неупругих тел.

Понятие «удар» подразумевает совокупность явлений, возникающих при столкновении движущихся твердых тел, а также при определенных взаимодействиях твердых тел с жидкостями и газами (гидравлический удар, взрыв и т. д.). Отличительная особенность данных физических явлений заключается в том, что время взаимодействия мало ( $10^{-4}$ – $10^{-6}$  с), а давление, возникающее в точках контакта соударяющихся тел или сред, достигает значений порядка ( $10^7$ – $10^8$ ) Н/м<sup>2</sup>. При ударе силы взаимодействия между сталкивающимися телами столь велики, что внешними силами, действующими на эти тела, можно пренебречь, что позволяет систему тел в процессе их соударения приближенно рассматривать как замкнутую и применять к ней законы сохранения.

Тела во время удара претерпевают деформацию. Сущность удара заключается в том, что кинетическая энергия относительного движения соударяющихся тел на короткое время преобразуется в энергию упругой деформации и, в той или иной степени, в энергию молекулярного движения. В процессе удара происходит перераспределение энергии между соударяющимися телами.

Наблюдения показывают, что относительная скорость тел после удара не достигает своего прежнего численного значения. Это объясняется тем, что идеально упругих тел нет. Отношение нормальных составляющих относительных скоростей тел после ( $U_n$ ) и до ( $V_n$ ) удара называется *коэффициентом восстановления скорости*  $k_c$ :

$$k_c = \frac{U_n}{V_n}. \quad (4.1)$$

Если для сталкивающихся тел  $k_c = 0$ , удар называют *абсолютно неупругими*, если  $k_c = 1$  — *абсолютно упругим*. На практике для соударяющихся тел  $0 < k_c < 1$ . Однако в некоторых случаях удары с большой степенью точности можно рассматривать либо как абсолютно упругие, либо как абсолютно неупругие.

Прямая, проходящая через точку соприкосновения тел и нормальная к поверхности их соприкосновения, называется *линией удара*. Удар называется *прямым*, если перед ударом скорости центров масс соударяющихся тел параллельны линии удара (в противном случае удар называется *косым*). Удар называется *центральный*, если центры масс соударяющихся тел лежат на линии удара (в противном случае удар называется *нецентральный*). Далее мы будем рассматривать только прямые центральные абсолютно упругие и абсолютно неупругие удары.

#### 4.2.1. Определение скоростей шаров после удара

При *абсолютно упругом ударе* шара массой  $m_1$ , движущегося со скоростью  $v_1$ , с шаром массой  $m_2$ , движущимся со скоростью  $v_2$  ( $v_2 < v_1$ , рис. 4.1), поверхности их деформируются, но этот процесс обратим, так как форма шаров мгновенно восстанавливается, а энергия деформации без потерь превращается в кинетическую энергию движения шаров.

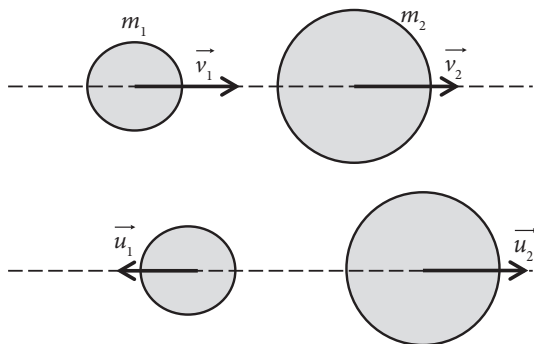


Рис. 4.1. Абсолютно упругий удар



После удара шары будут двигаться с измененными скоростями  $u_1$  и  $u_2$ , определить которые можно с помощью законов сохранения кинетической энергии:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2} \quad (4.2)$$

и сохранения импульса (количества движения):

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2. \quad (4.3)$$

Закон (4.3) записан для случая, когда скорости шаров до и после удара направлены в одну сторону. После несложных преобразований из (4.2) и (4.3) найдем скорости шаров после удара:

$$u_1 = \frac{2m_2 v_2 + v_1(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2}, \quad (4.4)$$

$$u_2 = \frac{2m_1 v_1 + v_2(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2}. \quad (4.5)$$

Если же происходит встречный (скорости шаров до удара имеют противоположные знаки) центральный абсолютно упругий удар, то необходимо учитывать знак скорости при вычислении соответствующих величин в выражениях (4.4), (4.5). При равенстве масс шаров ( $m_1 = m_2 = m$ ) из (4.4) и (4.5) следует

$$u_1 = v_2, \quad u_2 = v_1, \quad (4.6)$$

т.е. первый шар после удара приобрел скорость, равную скорости второго шара, и наоборот. Если до столкновения один из шаров (например, второй) покоился ( $v_2 = 0$ ), то  $u_1 = 0$ ,  $u_2 = v_1$ .

После *абсолютно неупругого удара* тела совершают совместное движение (рис. 4.2), а кинетическая энергия соударяющихся тел частично переходит в другие виды энергии и тела приобретают остаточную деформацию. При этом закон сохранения механической энергии системы не выполняется. Скорость  $u_1$  после удара, как из-

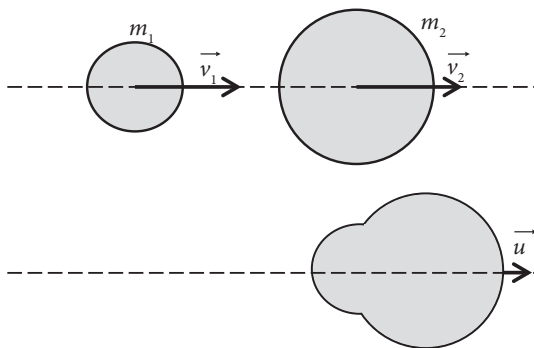


Рис. 4.2. Абсолютно неупругий удар

вестно, можно определить, используя закон сохранения импульса и считая, что внешние силы отсутствуют, а масса системы после удара  $m_1 + m_2$ :

$$u_1 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}. \quad (4.7)$$

Рассмотрим соударение двух одинаковых шаров массы  $m$ , подвешенных на нитях равной длины  $R$ . Если первоначально первый шар был поднят на высоту  $h_1$  (рис. 4.3), то в момент его удара о покоящийся второй шар кинетическая энергия первого шара будет равна исходной потенциальной энергии согласно закону сохранения

механической энергии:  $mgh_1 = \frac{mv_1^2}{2}$ .

Скорости шаров после взаимодействия также можно определить из закона сохранения механической энергии:

$$mgh_2 = \frac{mu_2^2}{2}, \quad mgh_3 = \frac{mu_1^2}{2},$$

где  $h_2$  и  $h_3$  — высота подъёмов второго и первого шара после взаимодействия.

Из этих соотношений следует

$$v_1 = \sqrt{2gh_1}, \quad (4.8)$$

$$u_2 = \sqrt{2gh_2}, \quad u_1 = \sqrt{2gh_3}, \quad (4.9)$$

$$h_1 = R(1 - \cos \alpha), \quad h_2 = R(1 - \cos \beta), \quad h_3 = R(1 - \cos \gamma), \quad (4.10)$$

где  $\alpha$  — угол отклонения первого шара от положения равновесия до взаимодействия;  $\beta$  — угол отклонения второго шара от положения равновесия после взаимодействия;  $\gamma$  — угол отклонения первого шара от положения равновесия после взаимодействия (рис. 4.3).

#### 4.2.2. Определение работы деформации при ударе шаров

При неупругом ударе часть механической энергии тел переходит в другие виды энергии (например, тепловую) и затрачивается на работу остаточной деформации поверхности шаров. В этом случае кинетическая энергия шаров после удара будет меньше, чем до удара, а полная энергия системы не изменяется.

Уменьшение механической энергии системы  $\Delta W$  с высокой точностью можно считать равным работе сил, создающих остаточную деформацию.

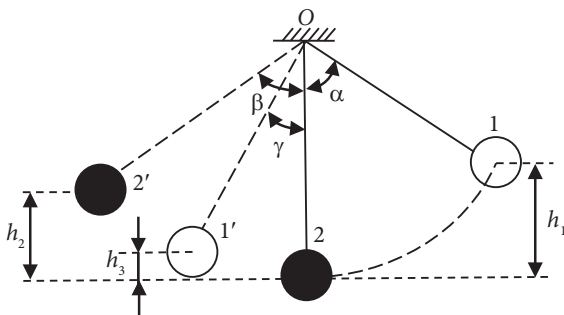


Рис. 4.3. Взаимодействие шаров, висящих на нитях

По общезначимому закону сохранения энергии при столкновении реальных тел следует учесть работу деформации тел  $A$ , т. е. ту часть общей энергии, которая необратимо расходуется на совершение невосстанавливающейся деформации и преобразуется в энергию теплового движения молекул вещества:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2} + A. \quad (4.11)$$

Это уравнение позволяет определить работу деформации шаров равных масс ( $m_1 = m_2 = m$ ), закрепленных на нерастяжимых нитях длины  $R$ . Если второй шар покоится ( $v_2 = 0$ ), а первый отклонен на угол  $\alpha$  от вертикального положения (рис. 4.3), то (4.11) преобразуется к виду

$$A = \Delta W = mg(h_1 - h_2 - h_3), \quad (4.12)$$

где  $h_2$  и  $h_3$  — высота подъема второго и первого шара после удара. С учетом (4.10)

$$A = mgR(\cos \beta + \cos \gamma - \cos \alpha - 1). \quad (4.13)$$

### 4.2.3. Определение коэффициента восстановления скорости тел при ударе

Степень «неупругости» удара определяется отношением нормальных составляющих скоростей тела после его удара о неподвижную стенку  $u_n$  (после удара) и  $v_1$  (до удара). Это отношение называется коэффициентом восстановления скорости:

$$k_c = \frac{u_n}{v_1}.$$

В качестве неподвижной стенки можно использовать шар достаточно большой массы или любое плоское массивное тело. С учетом того, что

$$v_1 = \sqrt{2gh_1}, u_n = \sqrt{2gh'_3}, \quad (4.14)$$

где  $h'_3$  — высота подъема шара после его удара о массивную неподвижную стенку, коэффициент восстановления

$$k_c = \sqrt{\frac{h'_3}{h_1}}.$$

Используя связь высоты подъема шара  $h'_3$  с углом отклонения нити от положения равновесия  $\gamma_1$ , окончательно получаем

$$k_c = \sqrt{\frac{1 - \cos \gamma_1}{1 - \cos \alpha}}. \quad (4.15)$$

Другим способом коэффициент восстановления скорости можно определить по результатам измерения скоростей шаров при соударении:

$$k_c = \frac{|u_2 - u_1|}{|v_2 - v_1|}. \quad (4.16)$$

#### 4.2.4. Определение силы взаимодействия тел

Силу взаимодействия двух тел можно определить исходя из основного уравнения динамики поступательного движения, записанного в проекции на горизонтальную ось (линию удара):

$$Ft_b = \Delta(mv) = m\Delta v, \quad (4.17)$$

где  $F$  — средняя сила удара;  $t_b$  — время взаимодействия соударяющихся тел;  $\Delta v$  — изменение скорости тела, возникающее в результате удара.

Так как скорость первого шара после его столкновения с покоящимся шаром отлична от нуля и в момент удара направлена в ту же сторону, что и скорость до удара, то  $\Delta(mv) = mv_1 - mu_1$  и, следовательно, сила взаимодействия шаров

$$F = \frac{m(v_1 - u_1)}{t_b}. \quad (4.18)$$

С учетом (4.8), (4.9) результат (4.18) преобразуется к виду

$$F = \frac{m(\sqrt{2gh_1} - \sqrt{2gh_3})}{t_B}. \quad (4.19)$$

#### 4.2.5. Определение времени соударения

Соударение упругих шаров не является мгновенным. Соприкосновение шаров длится хотя и малый, но конечный промежуток времени, а силы, возникающие при ударе, хотя и велики, но также конечны.

С момента соприкосновения шаров начинается процесс их деформации. Точка соприкосновения переходит в круглую площадку, при этом кинетическая энергия переходит в энергию упругой деформации. Возникают упругие силы, которые достигают наибольшей величины в момент наибольшего сжатия шаров. Затем идет обратный процесс перехода потенциальной энергии деформации в кинетическую энергию движения, заканчивающийся в момент расхождения шаров. Все эти процессы взаимного перехода энергии разворачиваются на очень малом промежутке времени, называемом временем соударения. В общем случае время соударения зависит от упругих свойств материала шаров, их относительной скорости в момент начала удара и от их размеров.

Время соударения определяется законом упругой силы, возникающей при соударении шаров. Известно, что при упругой деформации линейных пружин, стержней упругая сила  $F$  определяется законом Гука:  $F = -kh$ , где  $h$  — величина деформации пружины. При деформации тел сложной формы зависимость упругой силы от величины сжатия можно представить в следующем виде:

$$F = -kh^n. \quad (4.20)$$

Такой вид зависимости  $F$  от  $h$  следует из решения так называемой контактной задачи теории упругости, решенной Г. Герцем.

При этом было получено, что показатель  $n = 3/2$ , а величина  $k$  при соударении шаров радиуса  $R$  и  $R'$  определяется формулой

$$k = \frac{1}{D} \sqrt{\frac{RR'}{R + R'}}, \quad (4.21)$$

где  $D$  зависит от упругих свойств материала шаров.

Необходимо отметить, что при ударе деформируются оба шара, поэтому под величиной сжатия  $h$  в формуле (4.20) следует понимать разность между суммой  $R + R'$  и расстоянием между центрами шаров при соприкосновении (рис. 4.4).

Потенциальную энергию соприкасающихся деформированных шаров можно определить, используя известную формулу  $F = -dU/dh$ .

$$U = -\int F dh = \int k h^n dh = \frac{k}{n+1} h^{n+1}. \quad (4.22)$$

Зависимость времени соударения шаров  $\tau$  от параметров  $k$  и  $n$  в законе упругой силы (4.20) можно получить, используя закон сохранения энергии. В системе отсчета, в которой центр инерции шаров покоится, энергия до столкновения равна кинетической энергии относительного движения  $\mu v^2/2$ , где  $v$  — относительная скорость

сталкивающихся шаров, а  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$  — их приведенная масса.

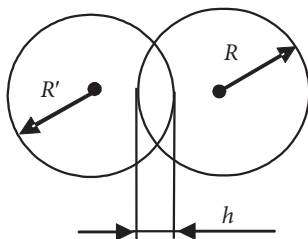


Рис. 4.4. Взаимодействие шаров

В течение столкновения относительная скорость  $v = dh/dt$  будет вначале уменьшаться до нуля. Также будет уменьшаться и кинетическая энергия, равная  $(\mu/2)(dh/dt)^2$ . Одновременно будет возрастать величина сжатия, которая достигнет значения  $h_0$  в тот момент, когда относительная скорость окажется равной нулю. После достижения максимального сжатия процессы пойдут в обратном направлении. Систему сталкивающихся упругих шаров можно считать замкнутой, поэтому в ней должен выполняться закон сохранения механической энергии, в силу которого сумма кинетической энергии  $\mu v^2/2$  и потенциальной энергии  $k \cdot h^{n+1}/(n+1)$  в течение деформации постоянна и равна энергии шаров до соприкосновения, т. е.

$$\frac{1}{2}\mu\left(\frac{dh}{dt}\right)^2 + \frac{k}{n+1}h^{n+1} = \frac{1}{2}\mu v^2. \quad (4.23)$$

Из этого уравнения можно определить максимальное сближение шаров  $h_0$ , которое достигается, когда скорость  $dh/dt = 0$ . Получаем из (4.23)

$$\frac{k}{n+1}h_0^{n+1} = \frac{1}{2}\mu v^2 \quad \text{или} \quad h_0 = \left(\frac{n+1}{k} \cdot \frac{\mu v^2}{2}\right)^{\frac{1}{n+1}}. \quad (4.24)$$

Уравнение (4.23) представляет собой дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Решая его относительно  $dt$ , получаем

$$dt = \frac{dh}{\sqrt{v^2 - \frac{2k}{\mu(n+1)}h^{n+1}}} = \frac{dh}{v\sqrt{1 - \frac{2k}{\mu v^2(n+1)}h^{n+1}}}.$$

Время  $\tau$ , в течение которого длится столкновение (т. е.  $h$  меняется от 0 до  $h_0$  и обратно до нуля), равно

$$\tau = 2 \int_0^{h_0} \frac{dh}{v\sqrt{1 - \frac{2k}{\mu v^2(n+1)}h^{n+1}}}.$$



Этот интеграл удобно взять, если ввести новую переменную:

$$x = \left[ \frac{2k}{\mu v^2 (n+1)} \right]^{\frac{1}{n+1}} h, \quad dh = \left[ \frac{\mu v^2 (n+1)}{2k} \right]^{\frac{1}{n+1}} dx.$$

Нетрудно видеть также, что  $x_0$  — значение новой переменной — в точке максимального сжатия равно 1. Имеем

$$\tau = \frac{2}{v} \left[ \frac{\mu v^2}{2k} (n+1) \right]^{\frac{1}{n+1}} \cdot \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^{n+1}}} = \left[ \frac{2^n \mu (n+1)}{k} \right]^{\frac{1}{n+1}} \cdot v^{\frac{1-n}{1+n}} \cdot \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^{n+1}}}.$$

Последний интеграл является табличным, его значение зависит только от числа  $n$ . Таким образом, зависимость времени соударения от скорости приобретает следующий вид:

$$\tau = I(n) \cdot \left[ \frac{2^n \mu (n+1)}{k} \right]^{\frac{1}{n+1}} \cdot v^{\frac{1-n}{1+n}}, \quad (4.25)$$

где  $I(n)$  — значение интеграла, зависящее от  $n$ .

## Лабораторная работа 14

### Изучение взаимодействия тел при ударе

Цель работы:

- изучить законы сохранения энергии и импульса;
- определить экспериментально работу деформации, коэффициент восстановления скорости, время и силу взаимодействия тел при ударе.

#### Методика эксперимента

В данной работе используется установка, позволяющая изучать удар при различных скоростях соударения.

Общий вид экспериментальной установки для исследования столкновения шаров показан на рис. 4.5. В основании закреплена колонка, к которой прикреплены нижний и верхний кронштейны. К верхнему кронштейну на нитях подвешены шары. Винт 7 позволяет изменять расстояние между шарами. На нижнем кронштейне укреплены транспортиры и электромагнит. После отвинчивания болтов электромагнит можно передвигать вдоль первой шкалы и фиксировать высоту его установки. Сила притяжения электромагнита регулируется винтом 11, который перемещает сердечник.

При включении прибора в сеть и нажатии клавиши «Сеть» загорается цифровой индикатор. Для установки нулевых показаний необходимо сбросить измерительную схему нажатием клавиши «Сброс». Электромагнит управляется клавишей «Пуск». При отжатой клавише «Пуск» включается электромагнит и шар, отведенный к магниту, удерживается в отклоненном положении. В этом положении по шкале измеряется начальный угол  $\alpha$  отклонения нити от вертикального положения. При нажатии клавиши «Пуск» электромагнит выключается, под действием силы тяжести шар перемещается и, сталкиваясь со вторым покоящимся шаром, вызывает его смещение. При этом нить второго шара отклоняется на угол  $\beta$ , а первого — на угол  $\gamma$ . Величины углов отклонения зави-

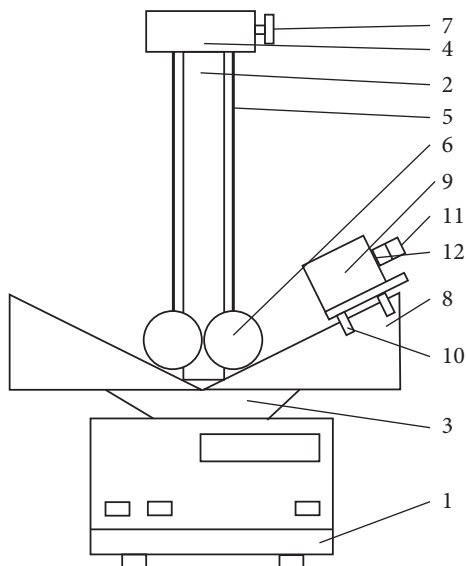


Рис. 4.5. Установка для исследования столкновения шаров:  
 1 — основание; 2 — колонка; 3 — нижний кронштейн; 4 — верхний кронштейн; 5 — нити; 6 — шары; 7 — винт; 8 — транспортиры; 9 — электромагнит; 10 — болты; 11 — винт; 12 — сердечник

сят от упругих свойств материалов шаров. При столкновении шара с неподвижной стенкой, установленной вместо покоящегося шара, нить правого шара отклоняется на угол  $\gamma_1$ .

### Порядок выполнения работы и условия эксперимента

#### **Измерение времени взаимодействия шаров и углов $\alpha$ , $\beta$ , $\gamma$ , $\gamma_1$ .**

1. Измерить расстояния  $R$  от точки подвеса до центра шаров и при необходимости отрегулировать их, эти расстояния должны быть равны. Массы шаров указаны на установке или могут быть измерены в процессе выполнения работы.

2. Включить источник питания (нажать клавишу «Сеть»).

3. Отжать клавишу «Пуск», отвести правый шар к электромагниту, который отклонен от вертикального положения на заданный угол, измерить угол отклонения нити  $\alpha$ .

4. Нажать клавишу «Сброс».

5. Нажать клавишу «Пуск». Измерить углы максимальных отклонений нитей левого  $\beta$  и правого шаров  $\gamma$  от вертикального положения после их взаимодействия. Зафиксировать по микросекундомеру время взаимодействия шаров  $t_b$ . Измерения повторить 3–5 раз и полученные данные занести в табл. 4.1.

Таблица 4.1

Измерение времени взаимодействия шаров и углов  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\gamma_1$

№ п/п	$\alpha$ , град.	$\beta$ , град.	$\gamma$ , град.	$t_b$ , мс	$\gamma_1$ , град.
1					
2					
...		$\bar{\beta}$	$\bar{\gamma}$	$\bar{t}_b$	$\bar{\gamma}_1$
1					
2					
...		$\bar{\beta}$	$\bar{\gamma}$	$\bar{t}_b$	$\bar{\gamma}_1$

6. Измерения в соответствии с пп. 2–5 провести для различных углов отклонения нити  $\alpha$ .

7. Используя пары шаров с различными упругими свойствами, выполнить исследования в соответствии с пп. 1–6.

8. Заменить левый шар на неподвижную стенку и в соответствии с пп. 2–5 определить максимальный угол  $\gamma_1$  отклонения от вертикального положения нити правого шара после взаимодействия правого шара со стенкой. Данные занести в табл. 4.1.

### Определение скоростей шаров.

1. По измеренному значению угла  $\alpha$  начального отклонения правого шара вычислить по формулам (4.8) и (4.10) его скорость  $v_1$  при прохождении им положения равновесия. Данные занести в табл. 4.2.

Таблица 4.2

## Определение скоростей шаров

$\alpha$ , град.	$v_1$ , м/с	Теоретические значения скоростей			Экспериментальные значения скоростей	
		Абсолютно упругий удар		Абсолютно неупругий удар	$u_1$ , м/с	$u_2$ , м/с
		$u_1$ , м/с	$u_2$ , м/с	$u_1$ , м/с		
$\alpha_1$						
$\alpha_2$						
$\alpha_3$						

2. Определить теоретические значения скоростей шаров после взаимодействия для случаев абсолютно упругого удара (формулы (4.4), (4.5)) и абсолютно неупругого удара (формула (4.7)). Данные занести в табл. 4.2.

3. По измеренным углам отклонения шаров после их взаимодействия ( $\beta$  и  $\gamma$ ) вычислить по формулам (4.9), (4.10) действительные значения скоростей шаров  $u_1$  и  $u_2$ . Данные занести в табл. 4.2.

4. Сравнить экспериментальные и теоретические значения скоростей и дать объяснение полученным результатам.

**Определение работы деформации при ударе шаров.**

1. Вычислить кинетическую энергию шара в момент удара по измеренному значению угла  $\alpha$  первоначального отклонения первого шара.

2. По измеренным значениям углов  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  и длины подвеса шаров  $R$  вычислить по формуле (4.13) изменение механической энергии системы — работу деформации. Данные занести в табл. 4.3.

Таблица 4.3

## Определение работы деформации, коэффициента восстановления скорости и силы взаимодействия при ударе шаров

$\alpha$ , град.	$A$ , Дж	$k_c$ (4.15)	$k_c$ (4.16)	$F$ , Н
$\alpha_1$				
$\alpha_2$				
$\alpha_3$				

### **Определение коэффициента восстановления скорости тел при ударе.**

1. По измеренным значениям  $\alpha$  и  $\gamma_1$  вычислить коэффициент восстановления  $k_c$  по формуле (4.15) и результаты занести в табл. 4.3.

2. Определить коэффициент восстановления скорости по результатам измерения скоростей шаров при соударении по формуле (4.16).

### **Определение силы взаимодействия тел.**

1. По измеренным значениям длины подвеса  $R$ , углов  $\alpha$  и  $\gamma$  начального и конечного отклонений первого шара и времени взаимодействия шаров  $t_v$  вычислить по формуле (4.19) силу взаимодействия шаров. Результаты занести в табл. 4.3.

2. Предполагая, что площадь контакта взаимодействующих шаров составляет  $S = 0,1 \text{ мм}^2$ , найти величину давления, действующего на стенку шара.

### **Обработка результатов измерения**

1. Для разных значений угла  $\alpha$  провести статистическую обработку результатов измерения времени взаимодействия шаров и углов отклонения нитей после их взаимодействия в соответствии с правилами обработки результатов прямых измерений.

2. Пользуясь формулами (4.8)–(4.10), рассчитать скорости шаров до и после их взаимодействия. В соответствии с правилами обработки результатов косвенных измерений вычислить погрешности определения значений скорости. Сделать вывод о зависимости времени соударения от величины скорости левого шара.

Поскольку скорость является косвенно измеряемой величиной, то для подсчета погрешности используется формула

$$\frac{\Delta v}{v} = \pm \sqrt{\left(\frac{\Delta \varphi}{\varphi}\right)^2 + \frac{1}{4} \left[ \left(\frac{\Delta R}{R}\right)^2 + \left(\frac{\Delta g}{g}\right)^2 \right]}, \quad (4.26)$$

где  $\varphi$  —  $\alpha$ ,  $\beta$  или  $\gamma$  (углы считаются малыми).

3. По формулам (4.13), (4.15), (4.16), (4.19) вычислить работу деформации при ударе шаров, коэффициент восстановления скорости тел при ударе и силу взаимодействия тел.

В соответствии с правилами обработки результатов косвенных измерений вычислить погрешности по следующим формулам:

а) для работы деформации при ударе шаров:

$$\frac{\Delta(A)}{A} = \pm \sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\Delta g}{g}\right)^2 + \left(\frac{\Delta R}{R}\right)^2 + \frac{\sin^2 \beta \cdot (\Delta \beta)^2 + \sin^2 \gamma \cdot (\Delta \gamma)^2 + \sin^2 \alpha \cdot (\Delta \alpha)^2}{4 \cdot \left(\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\beta}{2} - \sin^2 \frac{\gamma}{2}\right)^2}}. \quad (4.27)$$

Поскольку углы отклонения небольшие, то формулу (4.27) можно представить в виде

$$\frac{\Delta(A)}{A} = \pm \sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\Delta g}{g}\right)^2 + \left(\frac{\Delta R}{R}\right)^2 + \frac{4 \cdot (\beta^2 \cdot (\Delta \beta)^2 + \gamma^2 \cdot (\Delta \gamma)^2 + \alpha^2 \cdot (\Delta \alpha)^2)}{(\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2)^2}}; \quad (4.28)$$

б) для коэффициента восстановления скорости тел при ударе

$$\frac{\Delta k_c}{k_c} = \pm \sqrt{\left(\frac{\Delta \gamma_1}{\gamma_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \alpha}{\alpha}\right)^2},$$

$$\frac{\Delta(k_c)}{k_c} = \pm \sqrt{\frac{(\Delta u_1)^2 + (\Delta u_2)^2}{(u_1 - u_2)^2} + \left(\frac{\Delta v_1}{v_1}\right)^2}; \quad (4.29)$$

в) для силы взаимодействия тел

$$\frac{\Delta(F)}{F} = \pm \sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \frac{(\Delta v_1)^2 + (\Delta v_2)^2}{(v_1 - u_1)^2} + \left(\frac{\Delta t_{\text{в}}}{t_{\text{в}}}\right)^2}, \quad (4.30)$$

где  $t_{\text{в}}$  — время взаимодействия шаров.

### Контрольные вопросы и задания

1. Что называется ударом?
2. Какой удар называется абсолютно упругим? Приведите пример.
3. Какой удар называется абсолютно неупругим? Приведите пример.
4. Запишите закон сохранения энергии при ударе.
5. Выведите формулы для определения скорости шаров после абсолютно неупругого и абсолютно упругого ударов.
6. Запишите закон сохранения импульса при центральном ударе шаров.
7. Выполняется ли закон сохранения механической энергии при абсолютно неупругом ударе?
8. Выведите формулу для определения работы деформации при ударе.



## Лабораторная работа 15

### Измерение времени соударения упругих шаров

Цель работы:

- измерить время соударения упругих шаров;
- определить вид закона упругой силы, возникающей при соударении шаров.

#### Методика эксперимента

Вид формулы (4.25) подсказывает методику эксперимента для определения параметров в законе упругой силы (4.20).

Представим формулу (4.25) в следующем виде:

$$\tau = A v^b, \quad (4.31)$$

$$\text{где } A = I(n) \cdot \left[ \frac{2^n \mu (n+1)}{k} \right]^{\frac{1}{n+1}} \text{ и } b = \frac{1-n}{1+n}.$$

Прологарифмируем обе части этого выражения:

$$\ln \tau = \ln A + b \ln v. \quad (4.32)$$

Отсюда видно, что если экспериментально измерить время соударения  $\tau$  при различных значениях относительной скорости  $v$  и по этим данным построить зависимость  $\ln \tau$  от  $\ln v$ , то она, согласно (4.32), представляет собой прямую линию. Причем тангенс угла наклона этой прямой равен  $b$ , а отсекаемая часть —  $\ln A$ . По величине  $b$  можно определить показатель степени  $n$  в законе упругой силы. Далее по известным значениям  $n$  и  $A$ , зная массу шаров (т. е. величину  $\mu$ ), можно рассчитать и значение  $k$ .

Установка для измерения зависимости  $\tau$  от  $v$  такова. На основании установлена колонка, на которой закреплены два кронштейна. На верхнем кронштейне закрепляются стержни, служащие для подвеса шаров. Расстояние между этими стержнями может изменяться при помощи воротка. На стержнях помещены передвижные

держатели подвеса шаров. Через эти подвесы подводится напряжение к нижним подвесам, а через них — к шарам. Длина подвесов может регулироваться при помощи специальных втулок с винтами. На нижнем кронштейне закреплена угловая шкала, по которой можно перемещать электромагнит и фиксировать высоту его установки.

К основанию прибора привинчен электронный секундомер, на задней панели которого находится разъем, подающий напряжение к шарам и электромагниту. На лицевой панели секундомера расположены цифровое табло, кнопка «Сеть», а также кнопки управления «Пуск» и «Сброс».

Электронная часть установки работает следующим образом. При нажатии кнопки «Пуск» отключается напряжение, питающее электромагнит. Правый шар, удерживаемый до этого электромагнитом под определенным углом к вертикали, отрывается от него и приходит в контакт с покоящимся левым шаром. Шары соединены с контактами блока формирования импульсов. Таким образом, в момент начала соударения происходит короткое замыкание этих контактов, и блок формирования генерирует электрический сигнал. Этот сигнал подключает к счетчику импульсов кварцевый генератор, частота которого очень стабильна и равна  $(1\,000\,000 \pm 1 \text{ Гц})$ , т. е. длительность одного импульса равна 1 мкс.

Эти импульсы, если их число меньше 999, подсчитываются счетчиком, т. е. можно измерять интервалы времени до 999 мкс. В конце соударения, когда шары расходятся, блок формирования вырабатывает новый импульс, который отключает кварцевый генератор от счетчика импульсов. Число импульсов, сосчитанных счетчиком за время контакта шаров, или, что то же самое, длительность столкновения в микросекундах, высвечивается на цифровом табло. Если длительность контакта шаров превышает 999 мкс, на лицевой панели секундомера загорается лампочка «переполнение». При нажатии кнопки «Сброс» показания секундомера обнуляются, все электронные схемы переводятся в первоначальное состояние, прибор готов к следующим измерениям.

Скорость  $v$  шара в момент удара такая же, какая была у шара, падающего по вертикали с высоты  $H$ , т.е.  $v = \sqrt{2gH}$ . Из рис. 4.6 видно, что  $H = l - a$ , где  $l$  — длина подвеса. Но  $a = l \cos \varphi$ , значит,  $H = l(1 - \cos \varphi)$ . Из тригонометрии известно, что  $1 - \cos \varphi = 2 \sin^2(\varphi/2)$ , откуда  $H = 2l \sin^2(\varphi/2)$ . Таким образом,

$$v = 2\sqrt{gl} \sin \frac{\varphi}{2}. \quad (4.33)$$

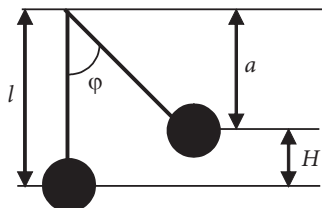


Рис. 4.6. Определение скорости шара при падении с высоты  $H$

Длина подвеса измеряется непосредственно линейкой, значения угла отсчитываются по шкале транспортира.

### Порядок выполнения работы и условия эксперимента

1. Откорректировать установку шаров. Для этого воротком, находящимся на верхнем кронштейне, установить такое расстояние между стержнями, чтобы шары соприкасались друг с другом. Отрегулировать высоту подвеса так, чтобы центры шаров были на одном уровне.

2. Включить микросекундомер в сеть. Нажать кнопку «Сеть». При этом на цифровом табло должны загореться нули. Кнопка «Пуск» должна быть отжата.

3. Установить электромагнит так, чтобы правый шар, удерживаемый электромагнитом, был отклонен на максимальный угол. Нажав кнопки «Сброс», а затем «Пуск», провести пробное измерение. При этом надо проследить, чтобы соударение было центральным, т.е.

траектория движения левого шара после столкновения должна находиться в плоскости движения правого шара до столкновения.

4. Установить с помощью электромагнита шар под максимально возможным углом к вертикали. Не менее 5 раз провести измерение времени соударения для данного угла. Следить за тем, чтобы левый шар в момент удара не двигался. Рассчитать скорость правого шара перед соударением по формуле (4.33), а также погрешность определения  $v$ . Провести обработку результатов измерения времени столкновения, т. е. рассчитать среднее значение, среднеквадратичное отклонение, доверительные границы. Провести анализ результатов измерения времени на промах.

5. Изменяя угол подвеса шаров в диапазоне до минимально возможного, провести измерение времени соударения аналогично п. 4. Результаты представить в виде таблицы.

6. Построить график зависимости  $\ln \tau$  от  $\ln v$ .

### Обработка результатов измерения

Дальнейшая обработка экспериментальной зависимости  $\ln \tau$  от  $\ln v$  предполагает использование формулы (4.32). Чтобы подчеркнуть линейный характер зависимости  $\ln \tau$  от  $\ln v$ , введем новые обозначения:  $x = \ln v$ ,  $y = \ln \tau$ ,  $a = \ln A$ . Тогда (4.32) примет обычный для линейной функции вид:

$$y = a + bx. \quad (4.34)$$

Задача состоит в нахождении таких значений  $a$  и  $b$ , при которых функция  $y = a + bx$  наилучшим образом соответствует опытным данным. (Смысл выражения «наилучшим образом» станет ясным из дальнейшего.)

За меру отклонения функции (4.34) от экспериментальных данных для  $i$ -го опыта выбирается величина  $(y_i - a - bx_i)^2$ . Почему берется именно такая величина, а не просто  $(y_i - a - bx_i)$ ? Ясно, что оба знака отклонения  $a + bx_i$  от  $y_i$  нехороши: плохо, если  $a$  и  $b$  таковы, что  $y_i < a + bx_i$ , но также нехорошо, если  $a$  и  $b$  таковы, что

$y_i > a + bx_i$ . Если бы за меру отклонения была бы взята величина  $y_i - a - bx_i$ , а затем находилась бы сумма отклонений в нескольких опытах, то можно было бы получить весьма малую величину за счет взаимного уничтожения отдельных слагаемых большой величины, но разных знаков. Это, однако, вовсе не говорило бы о том, что параметры  $a$  и  $b$  подобраны удачно. Если же за меру отклонения берется  $(y_i - a - bx_i)^2$ , то такого взаимного уничтожения не произойдет, так как все величины  $(y_i - a - bx_i)^2 > 0$ .

В качестве меры общей ошибки  $S$  в описании опытных данных функцией  $y = a + bx$  берется сумма мер отклонений для всех опытов (их число обозначим  $l$ ), т. е.

$$S = \sum_{i=1}^l (y_i - a - bx_i)^2. \quad (4.35)$$

Метод определения констант  $a$  и  $b$ , входящих в формулу (4.35), из требования минимальности общего отклонения, называется *методом наименьших квадратов*.

Таким образом, надо выбрать  $a$  и  $b$  так, чтобы величина  $S$  была наименьшей. Для этого используются правила нахождения экстремумов, известные из математического анализа. Если бы  $a$  было уже найдено, то в правой части (4.35) можно было бы изменять только  $b$ , поэтому должно было бы быть так:

$$\frac{\partial S}{\partial b} = 2 \sum_{i=1}^l (y_i - a - bx_i)(-x_i) = 0.$$

Аналогично, если бы было найдено  $b$ , то  $\partial S / \partial a =$   
 $= 2 \sum_{i=1}^l (y_i - a - bx_i)(-1) = 0.$

Эти два условия дают следующую систему уравнений для определения  $a$  и  $b$ :

$$a \sum_{i=1}^l x_i + b \sum_{i=1}^l x_i^2 = \sum_{i=1}^l x_i y_i, \quad al + b \sum_{i=1}^l x_i = \sum_{i=1}^l y_i. \quad (4.36)$$

Величины  $\Sigma x_i$ ,  $\Sigma y_i$ ,  $\Sigma x_i^2$  и  $\Sigma x_i y_i$  можно просто рассчитать по данным эксперимента. Тогда (4.36) есть система двух линейных уравнений относительно двух неизвестных  $a$  и  $b$ . Решая ее, нетрудно получить

$$b = \frac{l \sum_{i=1}^l x_i y_i - \sum_{i=1}^l x_i \sum_{i=1}^l y_i}{l \sum_{i=1}^l x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^l x_i \right)^2}, \quad a = \frac{\sum_{i=1}^l y_i - b \sum_{i=1}^l x_i}{l}. \quad (4.37)$$

Таким образом, параметры  $a$  и  $b$ , рассчитанные по формулам (4.37), дают наилучшее приближение функции (4.34) к экспериментальным данным.

Определив величины  $a$  и  $b$ , можно рассчитать среднеквадратичное отклонение  $S_0$ , характеризующее степень отклонения данных от рассчитанной прямой, по формуле

$$S_0 = \frac{\sum_{i=1}^l (y_i - a - b x_i)^2}{l - 2}. \quad (4.38)$$

Здесь  $a$  и  $b$  — параметры прямой, вычисленные по формулам (4.37). Среднеквадратичные погрешности каждого параметра определяются по формулам

$$S_b^2 = \frac{l S_0^2}{l \sum_{i=1}^l x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^l x_i \right)^2}, \quad S_a^2 = S_b^2 \frac{\sum_{i=1}^l x_i^2}{l}. \quad (4.39)$$

Наконец, доверительные границы  $\Delta a$  и  $\Delta b$  параметров прямой при доверительной вероятности  $P$  рассчитываются следующим образом:

$$\Delta a = t_{\frac{1+P}{2}, l-2} S_a, \quad \Delta b = t_{\frac{1+P}{2}, l-2} S_b, \quad (4.40)$$

т. е. коэффициент Стьюдента выбирается по таблицам для некоторой эффективной вероятности, равной  $(1 + P)/2$ , и для числа точек, равного  $l - 2$ . Например, если надо найти доверительные интервалы параметров прямой, полученных методом наименьших квадратов 10 точек ( $l = 10$ ) при доверительной вероятности  $P = 0,9$ , то в формулы (4.40) необходимо подставить коэффициент Стьюдента  $t_{0,95,8} = 2,36$ .

Определив параметр  $b$ , можно восстановить показатель в законе упругой силой. Для этого вспомним, что  $b = (1 - n)/(1 + n)$ . Тогда для  $n$  получаем

$$n = \frac{1-b}{1+b}. \quad (4.41)$$

Погрешность  $\Delta n$  определяется как погрешность косвенного измерения по формуле

$$\Delta n = \frac{2\Delta b}{(1+b)^2}, \quad (4.42)$$

где  $\Delta b$  вычислено по формуле (4.40). Полученное значение  $n$  теперь можно сравнить с теоретическим, равным для шаров  $3/2$ .

Определение константы  $k$  в законе (4.20) представляет существенно более сложную задачу. Учитывая, что  $a = \ln A$ , имеем  $A = e^a$  и, согласно формуле (4.31), получаем

$$k = 2^n \mu(n+1) \left[ \frac{I(n)}{e^a} \right]^{n+1}. \quad (4.43)$$

Сложность вычисления  $k$  по этой формуле заключается в том, что интеграл  $I(n) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^{n+1}}}$  достаточно просто берется лишь

для  $n$ , кратных  $1/2$ . Этого для экспериментально определяемых  $n$  ожидать трудно. Для произвольных  $n$  данный интеграл можно выразить

через так называемую гамма-функцию, зависящую от  $n$ . Используя таблицы для гамма-функции, можно получить значение интеграла. Другим способом расчета значения  $I(n)$  является численное интегрирование на ЭВМ. Получив значение  $I(n)$  тем или иным способом, затем просто рассчитывается величина  $k$ . Отметим, что, в принципе, возможно определить и погрешность  $\Delta k$ , зная  $\Delta n$  и  $\Delta a$ . Но эта задача представляет большие сложности и здесь не рассматривается.

Таким образом, определяются параметры в законе упругой силы (4.20). По известным  $k$  и  $n$  далее рассчитывается величина максимального сближения шаров  $h_0$  по формуле (4.24). Такие расчеты надо провести для максимальной и минимальной в данном эксперименте скоростей. После этого можно рассчитать по формуле (4.20) и силы, действующие в этих случаях при максимальном сжатии шаров.

Представляет интерес оценка площади контакта шаров в момент максимального сжатия, что можно сделать, зная величину  $h$ , из геометрических соображений. Очевидно, что пятно контакта представляет собой круг, площадь которого можно считать равной площади основания шарового сегмента радиуса  $R$  и высотой  $h$ .

#### Контрольные вопросы и задания

1. От чего зависит и чем определяется время соударения?
2. Как определить по известному времени соударения  $\tau$  показатель  $n$  и значение  $k$ ?
3. Два шара с  $R = R' = 5$  см и  $1/D = 2 \cdot 10^7$  Па разведены на угол  $30^\circ$ . Определить величину максимального сближения шаров  $h_0$ . Массы шаров и длину подвеса взять из эксперимента.

### 4.3. Полет тела. Баллистический маятник

В основе определения скорости полета тела с использованием баллистического маятника лежит закон сохранения момента импульса.



Если тело массой  $m$  движется в плоскости колебаний маятника со скоростью  $v$  (рис. 4.7), то момент импульса тела относительно оси маятника

$$L_0 = mvr, \quad (4.44)$$

где  $r$  — кратчайшее расстояние от оси маятника до траектории движения тела. Во время выстрела маятник покоится и момент импульса маятника равен нулю. После прилипания тела к мисочке маятника он вместе с телом приобретает начальную угловую скорость вращения  $\omega_0$ .

Из закона сохранения момента импульса для системы тело — маятник следует, что

$$mvr = J_1 \omega_0, \quad (4.45)$$

где  $J_1$  — суммарный момент инерции маятника и тела относительно оси вращения. Маятник с угловой скоростью  $\omega_0$  и соответственно кинетической энергией  $J_1 (\omega_0^2 / 2)$  начинает поворачиваться. При этом происходит закручивание упругой нити (подвеса) и возникает тормозящий момент. Поворот маятника прекращается, когда его

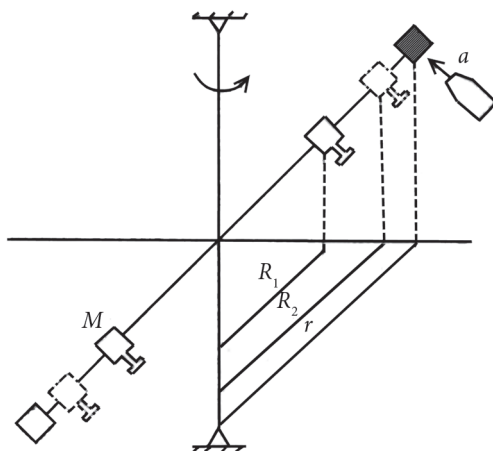


Рис. 4.7. Баллистический маятник

кинетическая энергия вращения полностью перейдет в потенциальную энергию закрученной нити:

$$J_1 \frac{\omega_0^2}{2} = \frac{k\alpha_0^2}{2}, \quad (4.46)$$

где  $k$  — коэффициент упругости нити;  $\alpha_0$  — максимальный угол закручивания маятника.

Решая совместно уравнения (4.45) и (4.46), находим

$$v = \frac{\alpha_0}{mr} \sqrt{kJ_1}. \quad (4.47)$$

Для определения скорости  $v$  из (4.47) необходимо знать величины  $k$  и  $J_1$ . Для этого следует выполнить два дополнительных измерения, основанных на законах крутильных колебаний маятника.

Запишем уравнение динамики вращательного движения:

$$J\varepsilon = M = -k\alpha, \quad (4.48)$$

где  $\varepsilon$  — угловое ускорение маятника;  $\varepsilon = d\omega/dt$ ;  $\omega = d\alpha/dt$  — угловая скорость маятника;  $M$  — тормозящий момент;  $\alpha$  — угол поворота маятника.

Подставляя формулы для  $\varepsilon$  и  $\omega$ , преобразуем (4.48) к виду

$$J \frac{d^2\alpha}{dt^2} + k\alpha = 0; \quad \frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{k}{J}\alpha = 0, \quad (4.49)$$

где  $k/J = \omega_k^2$  — циклическая частота колебаний маятника. Уравнение (4.49) есть уравнение крутильных колебаний. Решением его являются гармонические колебания с периодом

$$T = \frac{2\pi}{\omega_k} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{k}}. \quad (4.50)$$

Период колебания маятника можно найти экспериментально, причем период будет зависеть от момента инерции маятника и коэффициента упругости подвеса  $k$ .

Изменяя момент инерции маятника перемещением грузов массой  $M$  из положения  $R_1$ , для которого момент инерции  $J_1$ , в положение  $R_2$  (рис. 4.7), для которого момент инерции  $J_2$ , и определяя для этих моментов периоды  $T_1$  и  $T_2$ , составляем систему уравнений

$$T_1^2 = 4\pi^2 \frac{J_1}{k} = 4\pi^2 \frac{J_0 + 2MR_1^2}{k}, \quad (4.51)$$

$$T_2^2 = 4\pi^2 \frac{J_2}{k} = 4\pi^2 \frac{J_0 + 2MR_2^2}{k},$$

где  $J_0$  — момент инерции системы без подвижных грузов. В уравнениях (4.51)  $J_1$  и  $J_2$  находятся по теореме Штейнера:

$$J_1 = J_0 + 2MR_1^2; \quad J_2 = J_0 + 2MR_2^2.$$

Решая систему уравнений (4.51), находим коэффициент упругости нити:

$$k = \frac{8\pi^2 M(R_2^2 - R_1^2)}{T_2^2 - T_1^2} \quad (4.52)$$

и момент инерции

$$J_1 = \frac{2MT_1^2(R_2^2 - R_1^2)}{T_2^2 - T_1^2}. \quad (4.53)$$

Подставляя значения  $k$  и  $J_1$  в выражение (4.47), определяем скорость полета тела:

$$v = \frac{4\pi M\alpha_0 T_1(R_2^2 - R_1^2)}{mr(T_2^2 - T_1^2)}. \quad (4.54)$$

## Лабораторная работа 16

### **Определение скорости полета тела с помощью баллистического крутильного маятника**

Цель работы — экспериментально определить скорость полета тела с помощью баллистического крутильного маятника.

#### Методика эксперимента

Используемая в работе установка представлена на рис. 4.8. Она включает основание, вертикальную стойку, верхний и нижний кронштейны, средний кронштейн, набор «снарядов» различной массы, набор пружин спускового устройства, набор исследуемых образцов. Основание снабжено тремя регулируемыми опорами и зажимом для фиксации стойки. Вертикальная стойка выполнена из металлической трубы. Верхний и нижний кронштейны предназначены для крепления узлов подвески и натяжения торсиона (стальной проволоки), с которым связана металлическая рамка с грузами, предназначенная для установки съемной мишени с противовесом и исследуемых образцов. На среднем кронштейне, на котором нанесена шкала отсчета угла закручивания торсиона, расположены спусковое устройство, предназначенное для производства «выстрела», электромагнит, предназначенный для удерживания рамки в исходном положении и ее освобождения (при этом возникают крутильные колебания рамки вокруг вертикальной оси), фотодатчик, предназначенный для определения периода колебаний металлической рамки с исследуемыми образцами и без них. Съемная мишень предназначена для попадания «снарядов» после выстрела.

#### Порядок выполнения работы и обработки результатов измерений

1. Произвести регулировку положения основания установки при помощи регулировочных опор. Установить мишень в рамку. Убедиться, что мишень находится на линии «выстрела», а флажок

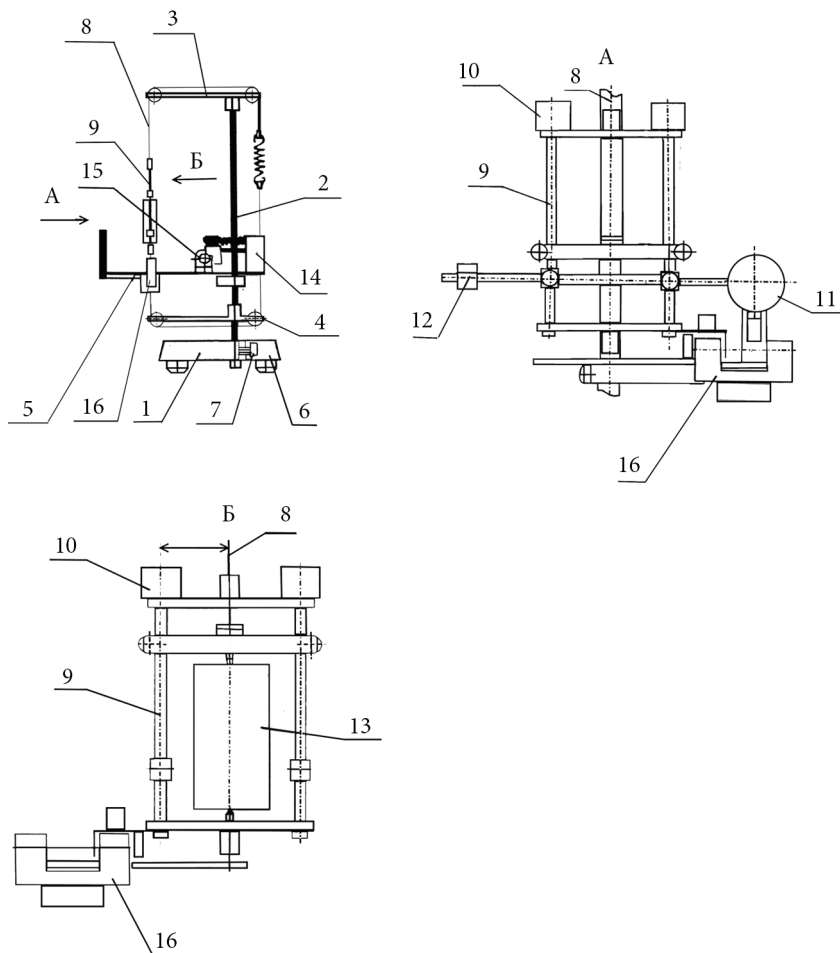


Рис. 4.8. Экспериментальная установка для исследования полета:  
 1 — основание; 2 — вертикальная стойка; 3 — верхний кронштейн;  
 4 — нижний кронштейн; 5 — средний кронштейн; 6 — регулируемые  
 опоры; 7 — зажим; 8 — торсион; 9 — металлическая рамка; 10 — грузы;  
 11 — съемная мишень; 12 — противовес; 13 — исследуемые образцы;  
 14 — спусковое устройство; 15 — электромагнит; 16 — фотодатчик

рамки пересекает оптическую ось фотодатчика (рамка находится в исходном положении). Подключить фотодатчик и электромагнит среднего кронштейна установки к электронному блоку при помощи кабеля. Вилку с маркировкой «Ф» вставить в розетку фотодатчика, а вилку с маркировкой «Э» — в розетку электромагнита. Установить «снаряд» на направляющий стержень спускового устройства, взвести пружину. Произвести «выстрел». Визуально определить максимальный угол отклонения рамки по шкале угловых перемещений с помощью флажка, закрепленного на рамке.

2. Отклонить рамку на угол  $30^\circ$  и зафиксировать с помощью электромагнита, нажав кнопку «Сеть» блока. Нажать кнопку «Пуск» блока. По показаниям таймера блока определить значение времени десяти колебаний рамки, нажав кнопку «Стоп». Определить среднее значение периода колебаний рамки по формуле

$$T = \frac{t}{n},$$

где  $t$  — время колебаний, с;  $n$  — число колебаний.

3. Нажать кнопку «Сброс» блока. Снять грузы с рамки, повторить вышеперечисленные операции и вычислить период  $T$  десяти колебаний рамки без грузов по формуле п. 2. Вычислить скорость полета «снаряда» по формуле

$$v = \frac{4\pi M \alpha_0 T_1 (R_2^2 - R_1^2)}{mr(T_2^2 - T_1^2)},$$

где  $\alpha_0$  — максимальный угол отклонения рамки, рад;  $R_1 = 0,0525$  м — расстояние от оси вращения рамки до центров масс грузов, м;  $M$  — масса груза, кг (взвесить на весах);  $m$  — масса «снаряда», кг (взвесить на весах);  $T_2$  и  $T_1$  — периоды колебаний рамки с грузами и без них, с;  $R_2$  — расстояние от оси вращения рамки до центра отпечатка «снаряда», залипшего в мишени (измерить при помощи линейки). Произвести не менее трех «выстрелов» и вычислить среднюю скорость «снаряда».

4. Оценить погрешности косвенных измерений скорости «снаряда» по формуле

$$\frac{\Delta(v)}{v} = \pm \sqrt{\left(\frac{\Delta M}{M}\right)^2 + \left(\frac{\Delta T_1}{T_1}\right)^2 + 4 \frac{R_2^2 \cdot (\Delta R_2)^2 + R_1^2 (\Delta R_1)^2}{(R_2^2 - R_1^2)^2} + \left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\Delta r}{r}\right)^2 + 4 \frac{T_1^2 \cdot (\Delta T_1)^2 + T_2^2 \cdot (\Delta T_2)^2}{(T_2^2 - T_1^2)^2}.$$

#### Контрольные вопросы и задания

1. Сформулируйте закон сохранения импульса.
2. Что такое момент силы?
3. Дайте определение момента инерции тела относительно неподвижной оси вращения.
4. Дайте определение момента импульса тела.
5. Сформулируйте закон сохранения момента импульса для замкнутой системы.
6. Запишите основное уравнение динамики вращательного движения.
7. Запишите формулу кинетической энергии тела, вращающегося вокруг неподвижной оси.
8. Запишите формулу работы при вращательном движении тела.

### 4.4. Гироскоп

Аксиально-симметричное тело (тело, обладающее цилиндрической симметрией), которое очень быстро вращается вокруг оси симметрии, называется *гироскопом*. Примером его могут служить волчок или диск, быстровращающиеся вокруг своей оси, проходящей через центр перпендикулярно поверхности.

Пусть гироскоп закреплен в точке центра масс (тогда его называют свободным гироскопом, так как момент всех внешних сил

относительно центра масс равен нулю:  $\vec{M} = 0$ ), но его ось может свободно поворачиваться в любом направлении. На практике это закрепление осуществляется с помощью карданного подвеса. Схематически оно изображено на рис. 4.9. Согласно уравнению моментов в таком случае момент импульса гироскопа сохраняется:  $\vec{L} = \text{const}$ .

Для свободного гироскопа возможны два варианта движения. Если гироскоп раскручен вокруг оси симметрии, то направления момента импульса и угловой скорости совпадают ( $\vec{L} = J\vec{\omega} = \text{const}$  (здесь  $J$  — момент инерции гироскопа)) и направление оси симметрии остается неизменным в пространстве. В этом можно убедиться, поворачивая подставку, на которой расположен карданный подвес. И даже кратковременные воздействия больших сил не могут изменить направление оси гироскопа в пространстве (гироскоп как бы сопротивляется изменению его момента импульса). Такая устойчивость быстровращающегося свободного гироскопа нашла многочисленное применение в технических устройствах (гироскопических компасах, автопилотах и пр.).

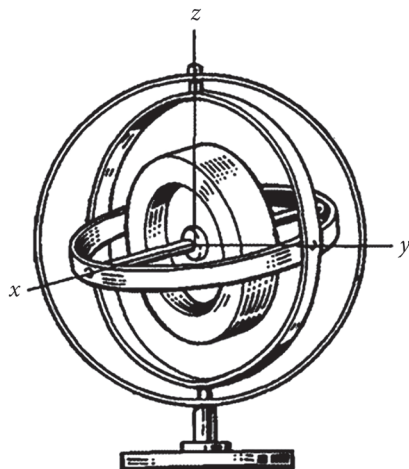


Рис. 4.9. Гироскоп на карданном подвесе



Если же свободный гироскоп раскручен так, что угловая скорость  $\vec{\omega}$  и ось симметрии гироскопа не совпадают (этого можно добиться, нанеся кратковременный удар по оси гироскопа), то возникает явление, называемое *свободной регулярной прецессией*, или *нутацией*. Это явление состоит в следующем: ось симметрии гироскопа и вектор угловой скорости  $\vec{\omega}$  начинают вращаться вокруг направления  $\vec{L} = \text{const}$  с постоянной угловой скоростью (скоростью нутации), которая обычно достаточно велика, и такое вращение воспринимается визуально как мелкое дрожание оси симметрии гироскопа. С течением времени нутация постепенно уменьшается и исчезает в силу неизбежного трения. Следует также заметить, что при очень большой угловой скорости вращения гироскопа несовпадение  $\vec{\omega}$  и оси симметрии гироскопа обычно незначительно, и тогда нутацией можно пренебречь и приближенно полагать, что  $\vec{L} = J\vec{\omega}$ .

При наличии же внешнего момента сил  $\vec{M}$  гироскоп ведет себя неожиданным образом: ось вращения, совпадающая с осью симметрии тела, начинает двигаться не в направлении силы, а перпендикулярно к ней, в результате совершая вращательное движение. Такое движение оси гироскопа под действием момента внешних сил называют *вынужденной прецессией*. Вынужденная прецессия также может сопровождаться нутациями. Движение гироскопа под действием момента внешних сил можно объяснить на основе уравнения моментов  $\vec{M} = d\vec{L}/dt$  и того факта, что в общем случае направления векторов угловой скорости, момента импульса и оси симметрии не совпадают.

В описании к лабораторным работам 17 и 18 подобно рассмотрим нутацию и прецессию гироскопа.

## Лабораторная работа 17

### Измерение моментов инерции и частоты нутации гироскопа

Цель работы:

- определить момент инерции симметричного гироскопа через период колебания физического маятника;
- измерить частоту нутации гироскопа, подвешенного в подшипнике, как функцию его частоты вращения, сравнить результаты с теоретическим значением частоты нутации гироскопа.

#### Краткая теория

Если правую систему координат совместим с гироскопом, как показано на рис. 4.10, чтобы ось симметрии совпала с осью  $Z$ , то главные оси инерции совпадут с координатными осями.

Гироскоп, имеющий цилиндрическую симметрию, обладает только двумя различными главными моментами инерции. Осевой момент  $J_z$  определен относительно оси  $Z$ , а экваториальный  $J_{xy}$  — относительно оси  $X$  или  $Y$  (так как, в силу симметрии, моменты инерции  $J_{xx}$  и  $J_{yy}$  одинаковы, они обозначены как  $J_{xy}$ ). Таким образом, для гироскопа, используемого в нашем эксперименте, тензор инерции имеет вид

$$I = \begin{pmatrix} J_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & J_{xy} & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{pmatrix}. \quad (4.55)$$

**Определение осевого момента инерции.** Вал гироскопа должен быть расположен горизонтально согласно рис. 4.11. Добавлением дополнительной массы  $m$  на край гироскопа радиуса  $R$  мы получаем физический маятник. Момент инерции гироскопа можно определить из периода колебания этого маятника.

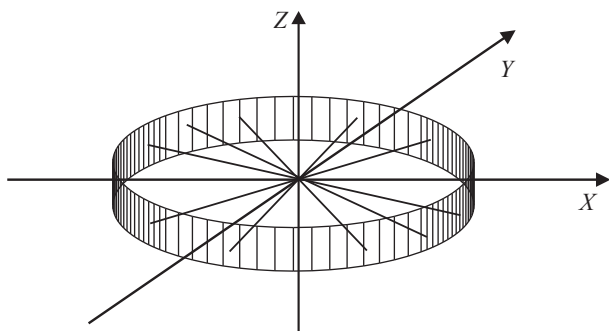


Рис. 4.10. Определение осевого и экваториального момента инерции  $J_z$  и  $J_{xy}$

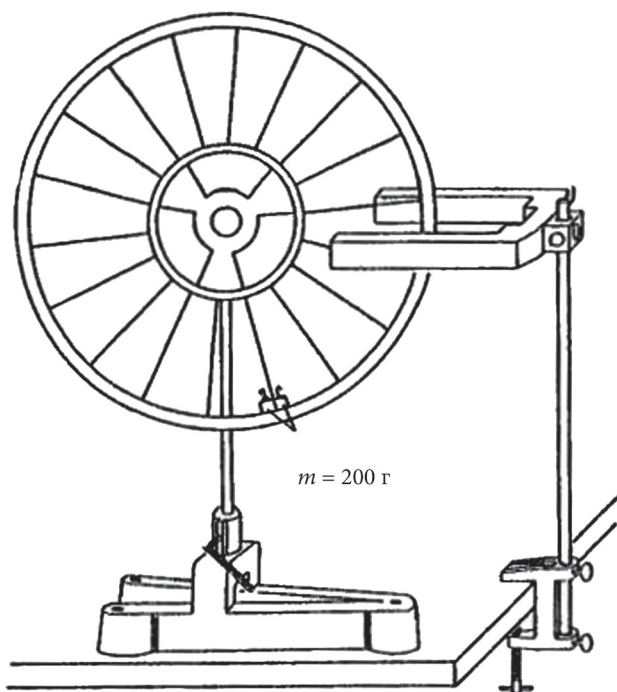


Рис. 4.11. Расположение гироскопа для определения  $J_z$

В результате добавления массы  $m$  (которую можно считать материальной точкой) момент инерции возрастет на величину  $mR^2$ :

$$J_z^* = J_z + mR^2. \quad (4.56)$$

Момент силы тяжести маятника  $M_z$  относительно оси вращения  $Z$  (возвращающий момент) при отклонении на угол  $\theta$  равен

$$M_z = -mgR \sin \theta, \quad (4.57).$$

где  $g$  — ускорение свободного падения.

Используем основное уравнение динамики вращательного движения:

$$M_z = J_z^* \frac{d^2 \theta}{dt^2}.$$

Подставляя в него выражение (4.57) для момента силы  $M_z$ , получим уравнение колебаний в виде

$$J_z^* \frac{d^2 \theta}{dt^2} + mgR \sin \theta = 0.$$

В случае малых колебаний (при малых углах отклонения  $\sin \theta \approx \theta$ ) получаем уравнение движения линейного гармонического осциллятора

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{mgR}{J_z^*} \theta = 0.$$

Решением этого дифференциального уравнения второго порядка будет гармоническое колебание с циклической частотой:

$$\omega = \sqrt{\frac{mgR}{J_z^*}}.$$

Тогда для периода колебаний физического маятника  $T$  получаем

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_z^*}{mgR}}. \quad (4.58)$$

Подставляя вместо  $J_z^*$  выражение (4.56), находим осевой момент инерции гироскопа  $J_z$ :

$$J_z = mR \left( \frac{gT^2}{4\pi^2} - R \right). \quad (4.59)$$

Таким образом  $J_z$  можно определить, измерив  $m$ ,  $R$  и  $T$ .

**Определение экваториального момента инерции.** В этом измерении вал гироскопа располагается вертикально, как показано на рис. 4.12, и подвешивается в центре масс. Центр масс гироскопа опущен вниз и находится на расстоянии  $d$  под точкой подвеса. Если гироскоп имеет массу  $m_k$ , то в соответствии с теоремой Штейнера момент инерции гироскопа относительно оси вращения, проходящей через точку подвеса, примет вид

$$J_{xy}^* = J_{xy} + m_k d^2. \quad (4.60)$$

Запишем выражение для момента силы тяжести  $M_{xy}$  относительно оси вращения (возвращающего момента):

$$M_{xy} = -m_k g d \sin \theta. \quad (4.61)$$

Выражения (4.60) и (4.61) аналогичны выражениям (4.56) и (4.57), если мы заменим  $R$  на  $d$ ,  $m$  на  $m_k$  и  $J_z$  на  $J_{xy}$ . Проведя аналогию, для экваториального момента инерции, можно записать следующее выражение:

$$J_{xy} = m_k d \left( \frac{gT^2}{4\pi^2} - d \right). \quad (4.62)$$

**Определение частоты нутации гироскопа.** В отсутствие вращательных действий на симметричный гироскоп, подвешенный за центр масс, выполняется закон сохранения момента импульса гироскопа:

$$\vec{L} = I \vec{\omega} = \text{const},$$

где  $\vec{\omega}$  — угловая скорость гироскопа;  $I$  — тензор инерции.

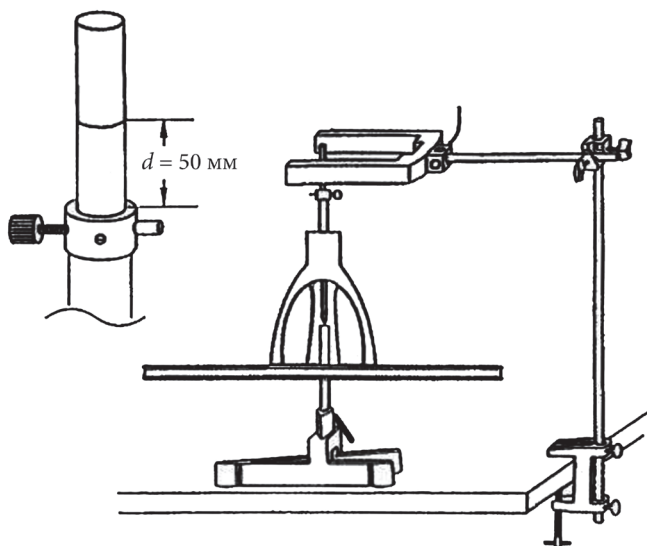


Рис. 4.12. Установка гироскопа и световой планки для определения  $J_{xy}$

Если угловая скорость не совпадает с главной осью тензора инерции, то направление момента импульса и угловой скорости также не совпадают. Как результат, ось гироскопа не сохраняет положение в пространстве, а вращается вокруг направления вектора момента импульса с частотой нутации  $f_n$ . Угловая скорость  $\vec{\omega}$  может быть разделена на две компоненты — угловую скорость  $\vec{\omega}_z$ , с которой гироскоп вращается вокруг своей оси  $Z$ , и угловую скорость  $\vec{\omega}_n$  нутации (рис. 4.13). «Мгновенная» ось вращения совпадает с вектором  $\vec{\omega}$ . Векторы  $\vec{L}$ ,  $\vec{\omega}$  и  $\vec{\omega}_z$  лежат в одной плоскости.

Для подсчета соотношения между  $\omega_z$  и  $\omega_n$  изучим гироскопическое движение в момент, в котором пространственная система координат совпадает с декартовой системой координат. Для компонент тензора момента импульса  $L$  справедливы следующие соотношения, записанные в главных осях:

$$L_y = J_{xy} \omega_y = L \sin \theta, \quad (4.63)$$

$$L_z = J_z \omega_z = L \cos \theta. \quad (4.64)$$

$L_x$  равно 0, потому что  $L$  лежит в плоскости  $(x, z)$ .

Из рис. 4.13 можем получить

$$\sin \theta = \frac{\omega_y}{\omega_n}. \quad (4.65)$$

Из (4.63) и (4.65) получаем  $L = J_{xy} \omega_n$ .

Если мы исключим из уравнения (4.64)  $L$  с помощью этого уравнения, то выражение для  $\omega_n$  будет иметь вид

$$\omega_n = \omega_z \frac{J_z}{J_{xy} \cos \theta}. \quad (4.66)$$

После деления выражения (4.66) на  $2\pi$  и для малого угла  $\theta$  ( $\cos \theta \approx 1$ ) получим

$$f_n = f_z \frac{J_z}{J_{xy}}. \quad (4.67)$$

Соотношение (4.67) — теоретическая частота нутации гироскопа, в котором  $J_z$  — осевой момент инерции гироскопа,  $J_{xy}$  — экваториальный момент инерции гироскопа,  $f_z$  — частота вращения гироскопа.

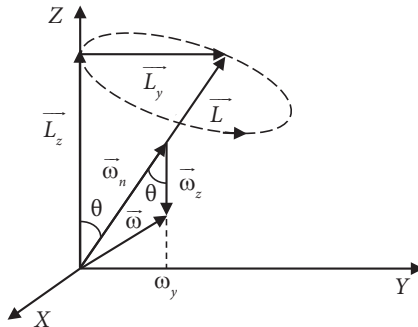


Рис. 4.13. Нутация гироскопа

Если главные моменты инерции  $J_z$  и  $J_{xy}$  гироскопа известны, коэффициент пропорциональности может быть измерен.

### Методика эксперимента

На рис. 4.14 изображена схема установки изучения движения гироскопа.

Установка состоит из гироскопа, световых планок, контроллера входов, цифрового счетчика. Гироскоп можно устанавливать в различных направлениях, в результате чего характер движения гироскопа будет различный.

### Порядок выполнения работы и условия эксперимента

#### Определение моментов инерции гироскопа.

1. Настройте цифровой счетчик и контроллер входов для измерения времени пяти периодов (десяти полупериодов): на контроллере входов нажмите кнопки «а»; поставьте переключатель «в» в положение «map», переключатель 3 — в «s;100Hz» (рис. 4.14).

2. Для определения осевого момента инерции установите гироскоп как показано на рис. 4.11. Добавьте две массы по 100 г каждая на внутреннюю часть обода ( $m = 0,2$  кг), используя липкую ленту. Поставьте световую планку так, чтобы световой луч пересекал спицу в положении, когда гироскоп покоится.

3. Отклоните гироскоп примерно на интервал одной спицы, установите счетчик и контроллер входов на 0 и отпустите гироскоп. Измерьте время пяти колебаний  $t$  не менее 5 раз, результаты занесите в табл. 4.4.

Таблица 4.4

Определение осевого момента инерции гироскопа  $J_z$

$t, c$	$T, c$	$R, m$



4. Измерьте расстояние между осью вращения и центром одного из грузиков  $R$  не менее 5 раз, результаты измерений занесите в табл. 4.4.

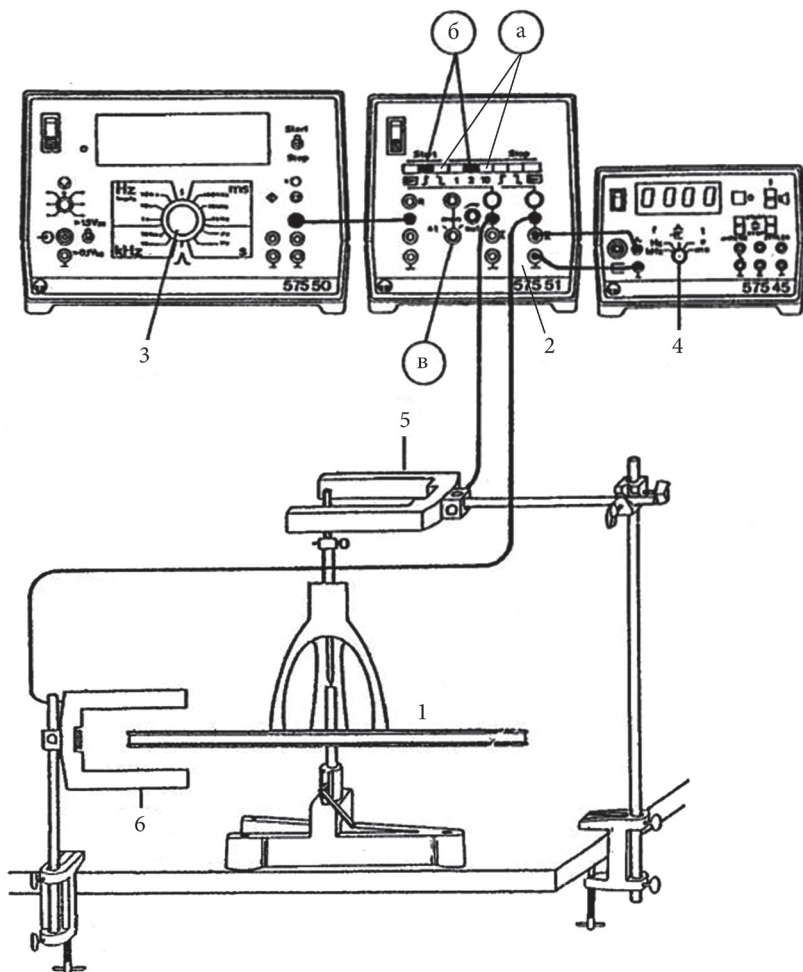


Рис. 4.14. Экспериментальная установка для изучения движения гироскопа:

1 — гироскоп; 2 — контроллер входов; 3 — цифровой счетчик;  
4 — счетчик; 5, 6 — световые планки

5. Для определения экваториального момента инерции установите приборы, как показано на рис. 4.12 (удалите дополнительные грузики). Настройте гироскоп (см. вставку к рис. 4.12) так, чтобы верхний край корпуса подшипника был примерно на  $d = 50$  мм ниже маркировочной канавки. Отрегулируйте световую планку и вал гироскопа, чтобы вал гироскопа взаимодействовал со световым лучом в положении покоя.

6. Отклоните ось гироскопа примерно на  $20^\circ$ . Установите цифровой счетчик и контроллер входов на 0 и отпустите гироскоп. Измерьте время пяти колебаний  $t$  не менее 5 раз. Результаты измерений занесите в табл. 4.5.

Таблица 4.5

Определение экваториального момента инерции гироскопа  $J_{xy}$

$t, \text{с}$	$T, \text{с}$	$F, \text{Н}$	$m_k, \text{кг}$

7. Используя динамометр, не менее 5 раз измерьте силу  $F = m_k g$ , где  $m_k$  — масса гироскопа. Результаты измерений занесите в табл. 4.5.

### Определение частоты нутации гироскопа.

1. Соберите и соедините установку как показано на рис. 4.14.

2. На контроллере входов нажмите кнопки «б», помеченные черным, для измерения периода нутации  $T_n$ . Установите переключатель «в» в положение «map». Переключите цифровой счетчик 3 на «ms» и счетчик 4 на «Hz».

3. Отрегулируйте гироскоп так, чтобы центр масс совпадал с острием стержня подшипника. Проверьте это, когда поместите иглу в корпус подшипника.

4. Приведите гироскоп в медленное вращение, отклоните ось гироскопа на некоторый угол и отпустите. Появится непрецессионное движение.

*Подсказка.* Для правильной регулировки положения верхний край корпуса подшипника должен находиться у верхней маркировочной канавки стойки подшипника.

5. Установите вертикально гироскоп с основанием так, чтобы ось гироскопа (вал) пересекала световой луч на световой планке 5. Закрепите световую планку 6 таким образом, чтобы луч пересекал спицы гироскопа.

6. Возьмите вал гироскопа левой рукой и раскрутите быстро за корпус подшипника правой рукой. Когда отпустите вал гироскопа, толкните его немного за ту часть, где нет световой планки, чтобы вызвать нутацию.

7. Обнулите контроллер входов и измерьте период нутации на цифровом счетчике и соответствующую частоту взаимодействия  $18f_z$  (так как у гироскопа 18 спиц) на счетчике.

8. Повторите измерения в течение некоторого времени, пока медленно снижается скорость (сбрасывайте контроллер входов перед каждым измерением).

9. Для разных значений частоты  $f_z$  заполните табл. 4.6 (не менее 10 точек).

Таблица 4.6

Изучение нутации гироскопа

$18f_z$ , Гц	$T_n$ , мс	$f_n$ , Гц	$f_z$ , Гц

## Обработка результатов измерения

### Определение моментов инерции гироскопа.

1. Рассчитайте среднее значение  $t$  и случайную погрешность  $\Delta t$  для времени пяти колебаний для случаев определения осевого и экваториального моментов инерции.

2. По среднему значению  $t$  рассчитайте период колебаний  $T$  и погрешность его определения  $\Delta T$  для случаев определения осевого и экваториального моментов инерции.

3. Рассчитайте среднее значение и полную погрешность определения расстояния между осью вращения и центром одного из грузиков  $R$ .

4. Рассчитайте среднее значение и полную погрешность определения силы тяжести гироскопа  $F$ .

5. Рассчитайте массу гироскопа  $m_k$  и полную погрешность определения массы:

$$\Delta m_k = m_k \sqrt{\left(\frac{\Delta F}{F}\right)^2 + \left(\frac{\Delta g}{g}\right)^2}, \quad (4.68)$$

где  $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ ,  $\Delta g = 0,05 \text{ м/с}^2$ .

6. По формулам (4.59) и (4.62) рассчитайте значение осевого и экваториального моментов инерции.

7. Рассчитайте погрешность определения осевого и экваториального моментов инерции по формулам

$$\frac{\Delta J_z}{J_z} = \sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{(gT^2 - 8R\pi^2)\Delta R}{(gT^2 - 4R\pi^2)R}\right)^2 + \left(\frac{2Tg\Delta T}{(gT^2 - 4R\pi^2)}\right)^2 + \left(\frac{T^2\Delta g}{(gT^2 - 4R\pi^2)}\right)^2}, \quad (4.69)$$

$$\frac{\Delta J_{xy}}{J_{xy}} = \sqrt{\left(\frac{\Delta m_k}{m_k}\right)^2 + \left(\frac{(gT^2 - 8d\pi^2)\Delta d}{(gT^2 - 4d\pi^2)d}\right)^2 + \left(\frac{2Tg\Delta T}{(gT^2 - 4d\pi^2)}\right)^2 + \left(\frac{T^2\Delta g}{(gT^2 - 4d\pi^2)}\right)^2}. \quad (4.70)$$

## Определение частоты нутации гироскопа.

1. Постройте график зависимости  $f_n = f(f_z) = \frac{J_z}{J_{xy}} f_z = k f_z$ .

2. Используя метод наименьших квадратов, определите наклон полученного графика, соответствующий величине  $k$ , и погрешность его определения  $\Delta k$  по формулам (описание метода наименьших квадратов подробно изложено к описанию лабораторной работы 12)

$$k = \frac{\sum_{i=1}^m f_{ni} f_{zi}}{\sum_{i=1}^m (f_{zi})^2} = \frac{f_{n1} \cdot f_{z1} + f_{n2} \cdot f_{z2} + \dots + f_{nm} \cdot f_{zm}}{(f_{z1})^2 + (f_{z2})^2 + \dots + (f_{zm})^2},$$

$$\Delta k = t_{\alpha, m-1} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m (f_{ni} - k \cdot f_{zi})^2}{(m-1) \sum_{i=1}^m (f_{zi})^2}},$$

где  $t_{\alpha, m-1}$  — коэффициент Стьюдента для числа, на единицу меньшего числа проделанных опытов.

3. Определите значение  $k$  из отношения осевого момента инерции к экваториальному  $J_z/J_{xy}$  ( $J_z$  и  $J_{xy}$  вычислены в первой части работы).

4. Рассчитайте погрешность для  $k$  по формуле

$$\Delta k = k \sqrt{\left(\frac{\Delta J_z}{J_z}\right)^2 + \left(\frac{\Delta J_{xy}}{J_{xy}}\right)^2}.$$

5. Сравните значения  $k$ , полученные разными способами.

## Контрольные вопросы и задания

1. Сформулируйте закон сохранения момента импульса.
2. Приведите примеры проявления закона сохранения момента импульса.

3. Что называют гироскопом? Объяснить работу гироскопа на кардановом подвесе.

4. Как можно вычислить осевой и экваториальный моменты инерции гироскопа?

5. Какое движение гироскопа называют нутацией?

6. Выведите теоретическое значение для частоты нутации гироскопа через момент импульса.

## Лабораторная работа 18

### Измерение скорости прецессии гироскопа

Цель работы:

- изучить основные закономерности движения гироскопа;
- измерить частоту прецессии гироскопа и сопоставить с теоретическим значением;
- определить осевой момент инерции гироскопа.

#### Краткая теория

Прецессия гироскопа возникает, когда гироскоп движется под действием внешней силы. Когда момент приложен к оси гироскопа, ось не движется за этим моментом, но отклоняется.

Ось вращения гироскопа проходит через точку опоры, совпадающую с началом прямоугольной декартовой системы координат (рис. 4.15).

Расстояние от центра масс гироскопа до начала координат —  $d$ , угол наклона оси гироскопа по отношению к оси  $Z$  —  $\alpha$ .

Момент импульса  $L$  гироскопа равен

$$\vec{L} = J\vec{\omega}, \quad (4.71)$$

где  $\omega$  — угловая скорость вращения гироскопа;  $J$  — момент инерции гироскопа.

С течением времени момент импульса  $L$  меняется по направлению под действием момента силы тяжести. Сила тяжести  $\vec{F} = m\vec{g}$  действует на центр масс гироскопа в гравитационном поле Земли и создает крутящий момент оси гироскопа:

$$\vec{M} = [\vec{d} \times \vec{F}] = m[\vec{d} \times \vec{g}],$$

модуль которого равен

$$M = Fd \sin \alpha = mgd \sin \alpha. \quad (4.72)$$

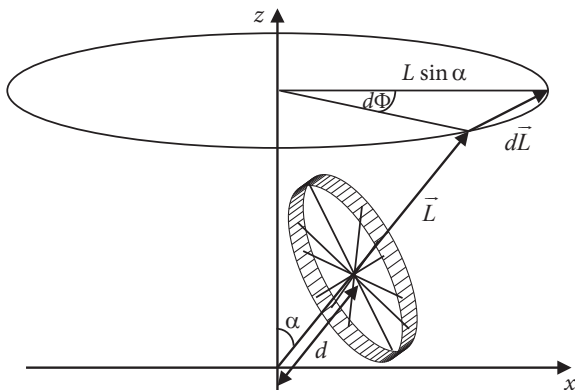


Рис. 4.15. Прецессия гироскопа

Вектор момента силы тяжести  $\vec{M}$  перпендикулярен к плоскости, образованной  $\vec{F}$  и  $\vec{d}$ . Он и вызывает изменение момента импульса  $d\vec{L}$ . Это изменение  $d\vec{L}$  перпендикулярно мгновенному значению  $\vec{L}$ . Векторы  $\vec{M}$  и  $\vec{L}$  связаны между собой известным уравнением моментов

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}.$$

Из рис. 4.15 видно, что  $dL = L \sin \alpha d\Phi$ , следовательно,

$$M = L \sin \alpha \frac{d\Phi}{dt} = L \sin \alpha \omega_p, \quad (4.73)$$

где  $\omega_p$  — угловая скорость прецессии.

Исходя из уравнений (4.73), (4.71) и (4.72), можно записать

$$\omega_p = \frac{mgd}{L} = \frac{d}{\omega} \frac{mg}{J}. \quad (4.74)$$

Из (4.74) видно, что  $\omega_p$  не меняется с течением времени, поэтому  $\omega_p$  можно назвать круговой частотой прецессии. Так как угловая скорость прецессии  $\omega_p$  постоянна и нет нутаций (мелких вращений



вершины гироскопа), то такую прецессию называют регулярной. Круговая частота прецессии  $\omega_p$  прямо пропорциональна расстоянию  $d$  от центра тяжести до точки опоры и обратно пропорциональна круговой частоте вращения гироскопа  $\omega$ . Также  $\omega_p$  не зависит от угла  $\alpha$  между осью гироскопа и осью  $Z$ .

Приведенные выше рассуждения справедливы при выполнении условия  $\omega_p \ll \omega$ , т. е. для быстровращающегося гироскопа. Только в таком случае  $\omega_p$  определяется как функция  $d$  и  $\omega$  в соответствии с формулой (4.74).

### Методика эксперимента

Схема установки для изучения прецессии гироскопа идентична схеме для изучения нутации гироскопа (см. описание методики эксперимента к лабораторной работе 17 (см. рис. 4.14)).

Расстояние от центра масс гироскопа до начала координат  $d$  не может быть определено сразу, так как неизвестно расположение центра масс гироскопа. Проведем дополнительные измерения. Измерим величину  $S$  — расстояние между верхним концом оси гироскопа и верхней крышкой подшипника гироскопа (рис. 4.16). Измерим  $S_0$  — расстояние между верхним концом оси гироскопа и бороздкой на оси гироскопа. Гироскоп поддерживается за центр масс  $P$ , если верхняя часть опоры гироскопа точно совпадает с канавкой. Для любых выбранных  $P$   $d = S_0 - S$ . В том случае когда центр масс и точка опоры совпадают,  $S = S_0$ , т. е. гироскоп остается стационарным во всех положениях, не падая (нейтральный гироскоп).

Значение  $d$  может быть как положительным, так и отрицательным. От того, выше или ниже точки опоры находится центр масс, будет зависеть направление прецессии.

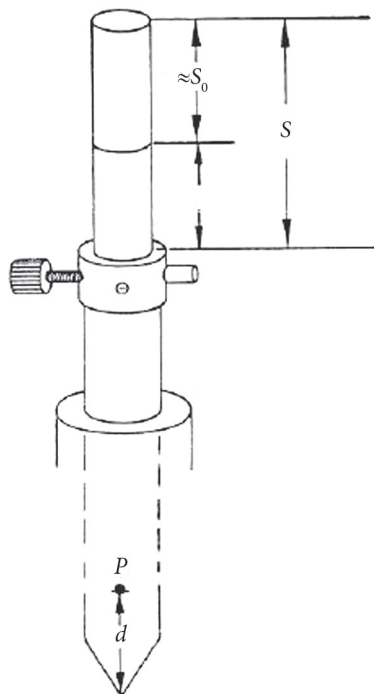


Рис. 4.16. Определение положения центра масс

### Порядок выполнения работы и условия эксперимента

#### Определение осевого момента инерции гироскопа и массы.

1. Настройте цифровой счетчик и контроллер входов для измерения времени пяти периодов (десяти полупериодов): на контроллере входов нажмите кнопки «а»; поставьте переключатель «в» в положение «тап», переключатель 4 в «s;100Hz» (см. рис. 4.14).

2. Для определения осевого момента инерции установите гироскоп, как показано на рис. 4.11. Добавьте две массы по 100 г каждая на внутреннюю часть обода ( $m = 0,2$  кг), используя липкую ленту. Поставьте световую планку так, чтобы световой луч пересекал спицу в положении, когда гироскоп покоится.

3. Отклоните гироскоп примерно на интервал одной спицы, установите счетчик и контроллер входов на 0 и отпустите гироскоп. Измерьте время пяти колебаний  $t$  не менее 5 раз, результаты занесите в табл. 4.7.

Таблица 4.7

Определение осевого момента инерции гироскопа  $J_z$

$t$ , с	$T$ , с	$R$ , м	$F$ , Н	$m_k$ , кг

4. Измерьте расстояние между осью вращения и центром одного из грузиков  $R$  не менее 5 раз, результаты измерений занесите в табл. 4.7.

5. Используя динамометр, не менее 5 раз измерьте силу  $F = m_k g$ , где  $m_k$  — масса гироскопа. Результаты измерений занесите в табл. 4.7.

### Определение частоты прецессии гироскопа.

1. Настройте установку, как показано на рис. 4.14.

2. Нажмите на контроллере входов кнопки «б», помеченные черным. Для измерения полного периода прецессии поставьте переключатель «в» на «map». Установите цифровой счетчик на измерение времени «ms».

3. Для измерения круговой частоты вращения  $\omega$  гироскопа используйте световую планку, контроллер входов и счетчик 4. Установите счетчик на измерение частоты «Hz».

*Замечание.* Круговая частота вращения  $\omega$  может быть определена методом частоты прерывания через спицы гироскопа светового луча за один оборот, учитывая 18 прерываний на световой панели (18 спиц):  $\omega = 2\pi f = 2\pi N/18$ , где  $N$  — показания дисплея.

4. Измерьте значение  $S_0$  штангенциркулем не менее 5 раз.

5. Установите желаемое  $S$ , измерьте его штангенциркулем не менее 5 раз.

6. Установите гироскоп вертикально и поместите основание так, чтобы ось гироскопа пересекала световой луч планки. Приведите гироскоп в движение. Возьмите верхний конец оси гироскопа левой рукой, а правой рукой многократно за подшипник раскрутите гироскоп. Аккуратно наклоните ось гироскопа и отпустите, создав тем самым прецессионное движение.

Таблица 4.8

Определение круговой частоты прецессии гироскопа

$S$ , см	$\omega_p$ , рад/с	$\omega$ , рад/с

7. Измерьте 6–10 раз пару величин ( $\omega_p$ ,  $\omega$ ), пока гироскоп постепенно останавливается. Убедитесь, что измерения частоты прецессии были проведены одновременно с соответствующей частотой вращения.

8. Проведите пп. 5–7 для различных значений  $S$  еще не менее 4 раз. Заполните таблицы, подобные табл. 4.8.

## Обработка результатов измерения

### Определение осевого момента инерции и массы гироскопа.

1. Рассчитайте среднее значение  $t$  и случайную погрешность времени пяти колебаний для определения осевого момента инерции.

2. По среднему значению  $t$  рассчитайте период колебаний  $T$  и погрешность его определения.

3. Рассчитайте среднее значение и полную погрешность определения расстояния между осью вращения и центром одного из грузиков  $R$ .

4. Рассчитайте среднее значение и полную погрешность определения силы тяжести гироскопа  $F$ .

5. Рассчитайте массу гироскопа  $m_k = F/g$  и полную погрешность определения массы по формуле (4.68).

6. По формулам (4.59) рассчитайте значение осевого момента инерции.

7. Рассчитайте погрешность определения осевого момента инерции по формуле (4.69).

### Определение частоты прецессии гироскопа.

1. Постройте графики зависимостей  $\omega_p$  от  $(1/\omega)$ , полученных для различной величины  $d$ .

2. Для различной величины  $d$ , используя метод наименьших квадратов, определите наклон  $p$  графика  $\omega_p = p/\omega$ , где  $p = mgd/J$ , и определите значение погрешности для  $\Delta p$  по формулам

$$p = \frac{\sum_{i=1}^m \omega_{pi} (1/\omega_i)}{\sum_{i=1}^m (1/\omega_i)^2} = \frac{\omega_{p1}/\omega_1 + \omega_{p2}/\omega_2 + \dots + \omega_{pm}/\omega_m}{(1/\omega_1)^2 + (1/\omega_2)^2 + \dots + (1/\omega_m)^2},$$

$$\Delta p = t_{p,m-1} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m (\omega_{pi} - p/\omega_i)^2}{(m-1) \sum_{i=1}^m (1/\omega_i)^2}}.$$

3. Постройте график зависимости  $p$  от  $d$ .

*Замечание.* Ошибка измерения  $S_0$  отвечает за явление, когда прямая линия на графике  $p = p(d)$  не пересекает начало координат. Если мы предположим маленькую величину  $d$ , график смещается по оси  $d$  на это же расстояние. Угол прецессии постепенно уменьшается, пока гироскоп не придет в вертикальное положение. Этот эффект вызван трением в подшипнике гироскопа, поэтому периодически необходимо снова отклонять ось гироскопа, пока идет серия экспериментов.

4. По графику зависимости  $p(d)$ , используя метод наименьших квадратов, определите наклон  $h$  графика  $p = hd$ , где  $h = m_k g / J_z$ , и определите значение погрешности для  $\Delta h$  по формулам

$$h = \frac{\sum_{i=1}^n p_i d_i}{\sum_{i=1}^n d_i^2} = \frac{p_1 d_1 + p_2 d_2 + \dots + p_n d_n}{d_1^2 + d_2^2 + \dots + d_n^2},$$

$$\Delta h = t_{P, m-1} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (p_i - h d_i)^2}{(n-1) \sum_{i=1}^n d_i^2}}.$$

5. Используя значения для  $J_z$  и  $m_k$ , полученные в первой части работы, определите величину  $h = m_k g / J_z$  и рассчитайте погрешность ее определения:

$$\Delta h = \sqrt{\left(\frac{\Delta m_k}{m_k}\right)^2 + \left(\frac{\Delta J_z}{J_z}\right)^2 + \left(\frac{\Delta g}{g}\right)^2}.$$

6. Сравните значения  $h$ , определенные двумя разными методами.

### Контрольные вопросы и задания

1. Сформулируйте закон сохранения момента импульса.
2. Приведите примеры проявления закона сохранения момента импульса.
3. Что называют гироскопом? Объясните работу гироскопа на кардановом подвесе.
4. Как можно вычислить осевой момент инерции гироскопа?
5. Какое движение гироскопа называют вынужденной прецессией?
6. Выведите теоретическое значение для частоты прецессии гироскопа.

## 5. СИЛА ТРЕНИЯ. НАКЛОННЫЙ МАЯТНИК

*Сила трения* — это сила, возникающая при соприкосновении двух тел и препятствующая их относительному движению. Причиной возникновения трения являются шероховатость трущихся поверхностей и взаимодействие молекул этих поверхностей. Сила трения зависит от материала трущихся поверхностей и от того, насколько сильно эти поверхности прижаты друг к другу.

При наличии относительного движения двух контактирующих тел силы трения, возникающие при их взаимодействии, можно подразделить:

- *на трение скольжения* — это сила, возникающая при поступательном перемещении одного из контактирующих взаимодействующих тел относительно другого и действующая на это тело в направлении, противоположном направлению скольжения;

- *трение качения* — момент сил, возникающий при качении одного из двух контактирующих/взаимодействующих тел относительно другого;

- *трение покоя* — сила, возникающая между двумя контактирующими телами и препятствующая возникновению относительного движения. Эту силу необходимо преодолеть для того, чтобы привести два контактирующих тела в движение друг относительно друга;

— *трение верчения* — момент силы, возникающий между двумя контактирующими телами при вращении одного из них относительно другого и направленный против вращения.

## 5.1. Коэффициент трения скольжения. Наклонный маятник

В простейших моделях трения считается, что сила трения скольжения прямо пропорциональна силе нормальной реакции между трущимися поверхностями:

$$F_{\text{тр}} = \mu N,$$

где  $\mu$  — коэффициент трения скольжения;  $N$  — модуль силы реакции опоры.

Выведем соотношение для определения коэффициента трения скольжения. Рассмотрим шарик, подвешенный на нити, лежащий на наклонной плоскости, выведенный из положения равновесия (наклонный маятник). На шарик действуют следующие силы: сила тяжести  $m\vec{g}$ , сила натяжения нити  $\vec{T}$ , сила реакции опоры  $\vec{N}$  и сила трения  $\vec{F}_{\text{тр}}$  (рис. 5.1).

Под действием результирующей силы  $\vec{F}$ , являющейся векторной суммой указанных сил  $\vec{F} = m\vec{g} + \vec{T} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}}$ , шарик совершает колебательное движение. Наличие силы трения между шариком и поверхностью качения приводит к уменьшению амплитуды колебаний шарика во времени. Работа сил трения может быть представлена в виде

$$A_{\text{тр}} = F_{\text{тр}} S = \mu NR \left( \frac{\alpha_0 + \alpha_n}{2} \right) 4n, \quad (5.1)$$

где модуль силы трения  $F_{\text{тр}} = \mu N$ ; путь, пройденный шариком,

$$S = R \frac{\alpha_0 + \alpha_n}{2} 4n; \mu — коэффициент трения; N — модуль силы реак-$$



ции опоры,  $N = mg \sin \beta$ ;  $R$  — длина нити подвеса;  $\alpha_0$  — начальный угол отклонения шарика;  $\alpha_n$  — конечный угол отклонения шарика;  $n$  — число полных колебаний, совершенных шариком при его движении.

Механическая энергия шарика уменьшается вследствие работы сил трения. Убыль механической энергии численно равна работе сил трения:

$$W_0 - W_n = A_{\text{тр}}, \quad (5.2)$$

где  $W_0$ ,  $W_n$  — механическая энергия шарика в исходном и конечном состояниях.

В качестве начального и конечного состояний шарика примем положения его максимального отклонения, при этом скорость движения шарика равна нулю, а механическая энергия шарика численно равна потенциальной энергии. В этом случае

$$A_{\text{тр}} = U_0 - U_n = mg(h_0 - h_n), \quad (5.3)$$

где  $h_0$ ,  $h_n$  — начальная и конечная высота подъема шарика. Высота подъема шарика  $h$  может быть выражена через длину нити подве-

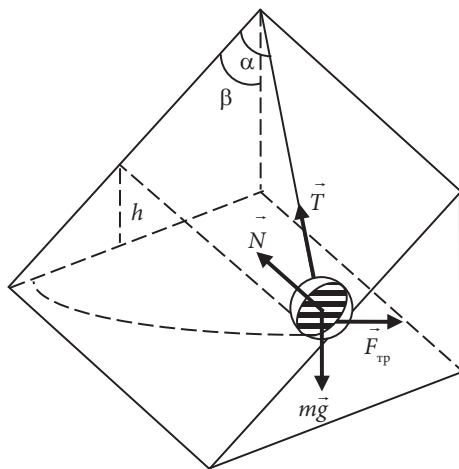


Рис. 5.1. Наклонный маятник

са  $R$ , угол отклонения шарика от положения равновесия в плоскости колебаний  $\alpha$  и угол наклона штанги  $\beta$  (рис. 5.1)

$$h = R \cos \beta (1 - \cos \alpha). \quad (5.4)$$

В этом случае выражение (5.3) принимает вид

$$\begin{aligned} A_{\text{тр}} &= mgR \cos \beta (\cos \alpha_n - \cos \alpha_0) = \\ &= 2mgR \cos \beta \sin \frac{\alpha_0 + \alpha_n}{2} \sin \frac{\alpha_0 - \alpha_n}{2}, \end{aligned} \quad (5.5)$$

поскольку для малых углов ( $\alpha \leq 5^\circ \approx 0,09$  рад)  $\sin \alpha \approx \alpha$ , то

$$\sin \frac{\alpha_0 - \alpha_n}{2} \approx \frac{\alpha_0 - \alpha_n}{2} \quad \text{и} \quad \sin \frac{\alpha_0 + \alpha_n}{2} \approx \frac{\alpha_0 + \alpha_n}{2},$$

тогда

$$A_{\text{тр}} = 2mgR \cos \beta \frac{\alpha_0 + \alpha_n}{2} \frac{\alpha_0 - \alpha_n}{2}. \quad (5.6)$$

Сопоставляя соотношения (5.1) и (5.6), получаем выражение для коэффициента трения скольжения

$$\mu = \frac{\alpha_0 - \alpha_n}{4n} \operatorname{ctg} \beta, \quad (5.7)$$

где  $\alpha_0$  и  $\alpha_n$  выражены в радианах. Поскольку шкала для измерения углов  $\alpha_0$  и  $\alpha_n$  проградуирована в градусах, рабочий вид формулы (5.7) имеет вид

$$\mu = \frac{\pi}{180} \frac{\alpha_0 - \alpha_n}{4n} \operatorname{ctg} \beta, \quad (5.8)$$

где углы  $\alpha_0$  и  $\alpha_n$  выражены в угловых градусах.

## 5.2. Коэффициент трения качения

Рассмотрим коэффициент трения качения (рис. 5.2). Пусть на тело вращения, располагающееся на опоре, действуют  $\vec{P}$  — внешняя сила, пытающаяся привести тело в состояние качения или поддерживающая качение и направленная вдоль опоры;  $\vec{N}$  — прижимающая сила (в частном случае это сила тяжести);  $\vec{R}_p$  — реакция опоры.

Если векторная сумма этих сил равна нулю  $\vec{P} + \vec{N} + \vec{R}_p = 0$ , то ось симметрии тела движется равномерно и прямолинейно или остается неподвижной.

Вектор  $\vec{F}_t = -\vec{P}$  определяет силу трения качения, противодействующую движению, и является горизонтальной составляющей силы реакции опоры. Таким образом, прижимающая сила уравнивается вертикальной составляющей реакции опоры, а внешняя сила уравнивается горизонтальной составляющей реакции опоры.

Равномерное качение означает также, что сумма моментов сил относительно произвольной точки равна нулю. Из равновесия относительно мгновенной оси вращения моментов сил трения и прижимающей силы следует

$$PR = F_t R = Nf, \text{ откуда } F_t = \frac{f}{R} N, \quad (5.9)$$

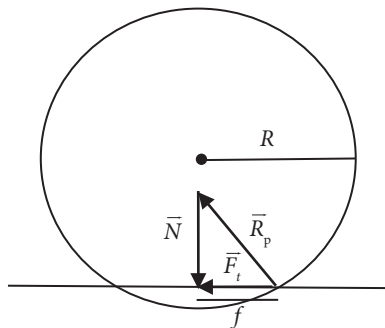


Рис. 5.2. Сила трения качения

где  $f$  — коэффициент трения качения, имеющий размерность длины (следует отметить важное отличие от коэффициента трения скольжения, который безразмерен), он равен длине плеча силы  $\vec{N}$  относительно мгновенной оси;  $R$  — радиус катящегося тела.

Эта зависимость подтверждается экспериментально. Для малой скорости качения сила трения качения не зависит от величины скорости. Когда скорость качения достигает значений, сопоставимых со значениями скорости деформации в материале опоры, трение качения резко возрастает и даже может превысить трение скольжения при аналогичных условиях.

## Лабораторная работа 19

### **Определение коэффициентов трения с помощью наклонного маятника**

Цель работы:

- ознакомиться со сложным механическим движением;
- определить коэффициенты трения различных пар материалов.

#### Методика эксперимента

Установка, используемая в настоящей работе, представлена на рис. 5.3 и включает основание, вертикальную стойку, верхний кронштейн с панелью, маятник скольжения и маятник качения, которые устанавливаются на верхнем кронштейне поочередно. Основание снабжено тремя регулируемыми опорами и зажимом для фиксации вертикальной стойки. Вертикальная стойка выполнена из металлической трубы, на которую нанесена риска, показывающая угол отклонения панели от вертикального положения. Панель имеет прямоугольное окно, в котором устанавливаются сменные образцы в виде пластин. В нижней части панели нанесена шкала отсчета угла отклонения маятников. С помощью винта панель отклоняется от вертикального положения. Угол отклонения панели определяется с помощью шкалы, закрепленной в нижней части панели.

Маятник скольжения представляет собой металлический стержень, снабженный призматической опорой и обоймой, в которую устанавливаются сменные образцы в виде усеченного шара. Маятник качения представляет собой металлический шарик, подвешенный на капроновой нити. Шары являются сменными.

#### Порядок выполнения работы и обработки результатов измерений

1. Установить угол  $\beta$  наклона панели равным  $0^\circ$ . Используя маятник качения в качестве отвеса, при помощи регулировочных опор

основания выставить стойку установки в строго вертикальном положении. Протереть исследуемые поверхности сменных пластин, усеченные шары и шары маятника качения этиловым спиртом и вытереть насухо.

2. Установить одну из сменных пластин на панель. Вставить усеченный стальной шар в обойму маятника скольжения сферической поверхностью наружу. Повесить маятник скольжения при помощи

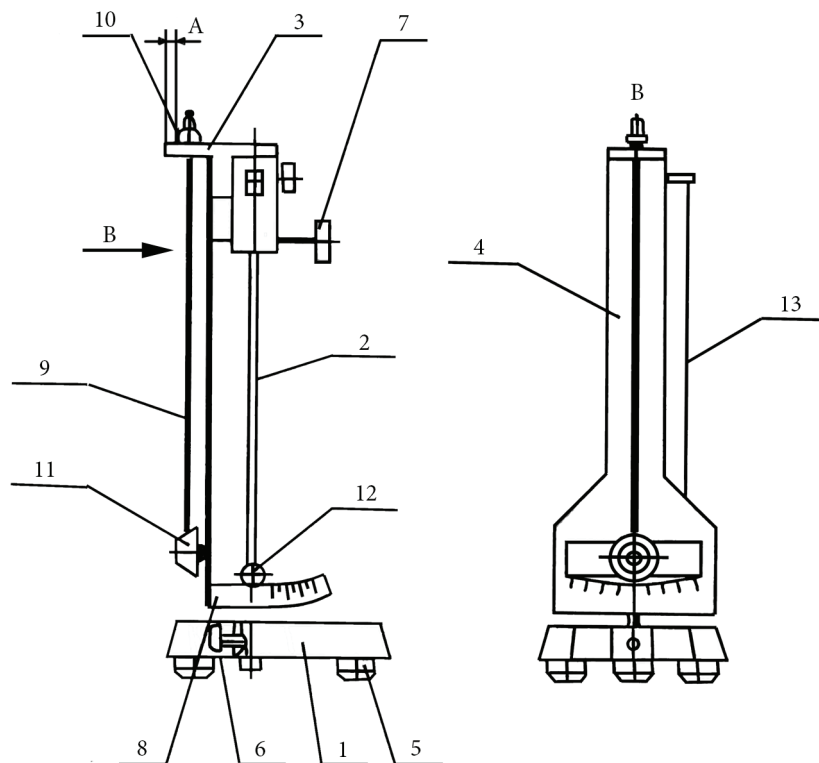


Рис. 5.3. Экспериментальная установка  
для определения коэффициентов трения:

- 1 — основание; 2 — вертикальная стойка; 3 — верхний кронштейн;  
4 — панель; 5 — регулируемые опоры; 6 — зажим; 7 — винт; 8 — шкала;  
9 — металлический стержень; 10 — призматическая опора; 11 — обойма;  
12 — металлический шарик; 13 — капроновая нить

призматической опоры на верхний кронштейн таким образом, чтобы усеченный шар соприкоснулся с установленной на панель пластиной и ось маятника была параллельна лицевой поверхности панели. При необходимости подрегулировать положение основания так, чтобы указатель маятника оказался напротив нулевого деления шкалы отсчета угла отклонения маятника, но без нарушения вертикального положения стойки.

3. При помощи штангенциркуля измерить расстояние  $A$  (рис. 5.3). Установить угол наклона панели  $\beta$  равным  $2^\circ$ . Отвести рукой маятник в одно из крайних положений и записать начальный угол отклонения  $\alpha_0$  по шкале отсчета угла отклонения маятника. Отпустить маятник и записать угол отклонения  $\alpha_n$  при совершении маятником  $n$  полных колебаний.

4. Определить коэффициент трения скольжения по формуле (5.8). Формула (5.8) верна при условии, что угол  $\beta \leq 2^\circ$ . При установке сменной пластины из другого материала маятник необходимо подвешивать на том же расстоянии  $A$ .

5. Снять маятник скольжения. Установить маятник качения (стальной шарик) в такое положение, чтобы указатель маятника оказался напротив нулевого деления шкалы отсчета угла отклонения маятника. При заданном угле наклона панели  $\beta$  отклонить шарик от положения равновесия на угол  $\alpha_0$  (например,  $5^\circ$ ). Записать выбранный угол. Угол наклона панели и угол отклонения шарика выбираются таким образом, чтобы шарик катался по пластине без проскальзывания. Затем без толчка отпустить маятник и с этого момента начать отсчет колебаний. После того как маятник совершит  $n$  полных колебаний, записать угол отклонения колебания маятника  $\alpha_n$ . Определить коэффициент трения качения по формуле

$$f = \frac{\pi}{180} \frac{\alpha_0 - \alpha_n}{4n} r \operatorname{ctg} \beta, \quad (5.10)$$

где  $r = 0,01$  м — радиус шара.

6. Оценить погрешности косвенных измерений коэффициентов трения качения и трения скольжения по формулам

$$\Delta\mu = \pm\mu \sqrt{\frac{(\Delta\alpha_0)^2 + (\Delta\alpha_n)^2}{(\alpha_0 - \alpha_n)^2} + \frac{(\Delta\beta)^2}{\sin^4 \beta}}, \quad (5.11)$$

$$\Delta f = \pm f \sqrt{\frac{(\Delta\alpha_0)^2 + (\Delta\alpha_n)^2}{(\alpha_0 - \alpha_n)^2} + \left(\frac{\Delta r}{r}\right)^2 + \frac{(\Delta\beta)^2}{\sin^4 \beta}}. \quad (5.12)$$

### Контрольные вопросы и задания

1. Что такое сила нормального давления?
2. Какие виды трения вы знаете?
3. Чем обусловлены силы трения скольжения и силы трения качения?
4. В каких случаях силы трения играют положительную роль?
5. В каких случаях силы трения играют отрицательную роль?
6. Как можно измерить силы трения?



## 6. ИЗУЧЕНИЕ СВОБОДНЫХ И ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ

### 6.1. Гармонический осциллятор

*Гармоническим осциллятором* называется система, которая при выведении ее из положения равновесия испытывает действие возвращающей силы  $F$ , пропорциональной смещению  $x$ :

$$F = -kx, \quad (6.1)$$

где  $k$  — постоянный коэффициент. Возвращающая сила  $F$  — это внутренняя сила. Природа ее зависит от устройства самой колебательной системы (это может быть сила тяжести, сила упругости и пр.).

В случае если  $F$  — единственная сила, действующая на осциллятор, то систему называют *простым* или *консервативным гармоническим осциллятором*. При движении консервативного осциллятора полная механическая энергия остается неизменной. Так как осциллятор предоставлен сам себе (нет внешнего воздействия), то говорят, что он совершает *свободные колебания*.

Свободные колебания консервативного гармонического осциллятора представляют собой периодическое движение около положения равновесия по гармоническому закону (гармонические колебания — это колебания, происходящие по закону синуса или

косинуса). Частота и амплитуда колебаний при этом остаются постоянными. Причем частота колебаний не зависит от амплитуды (это свойство называется изохронностью колебаний).

Механическими примерами гармонического осциллятора являются математический маятник, груз на пружине, торсионный (или крутильный) маятник и акустические системы.

Если помимо возвращающей силы  $F$  на осциллятор действует еще и сила вязкого трения, пропорциональная скорости движения, то такую систему называют *затухающим (диссипативным) осциллятором*. В случае существенного трения колебаний не будет и система медленно придет в равновесное состояние. Если же трение не слишком велико, то осциллятор будет совершать синусоидальные колебания с постоянной частотой и экспоненциально убывающей амплитудой (почти периодическое движение). Частота свободных колебаний затухающего осциллятора будет несколько ниже, чем у аналогичного осциллятора без трения.

Наряду с трением на осциллятор может действовать какая-либо другая внешняя сила. Характер движения осциллятора при этом изменится в зависимости от особенностей действующей силы. Под воздействием внешней силы, зависящей от времени, осциллятор будет совершать *вынужденные колебания*. Наиболее важным является случай воздействия гармонической внешней силы.

## 6.2. Свободные колебания консервативного гармонического осциллятора

Пусть  $x$  — смещение материальной точки относительно ее положения равновесия, а  $F$  — действующая на точку возвращающая сила любой природы вида  $F = -kx$ , где  $k = \text{const}$ . Тогда, используя второй закон Ньютона, можно записать ускорение как

$$a = -\frac{k}{m} x. \quad (6.2)$$

Обозначая  $\omega_0^2 = k/m$  и заменяя  $a$  на вторую производную от координаты по времени  $a = \ddot{x}$ , получаем однородное дифференциальное уравнение

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (6.3)$$

Это дифференциальное уравнение описывает поведение консервативного гармонического осциллятора. Величину  $\omega_0$  называют собственной частотой линейного гармонического осциллятора (по смыслу это циклическая частота). Будем искать решение данного уравнения в виде

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi), \quad (6.4)$$

где  $A$  — амплитуда колебаний;  $\omega$  — частота колебаний;  $\varphi$  — начальная фаза.

Тогда  $\ddot{x}(t) = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi)$ .

Подставляем в дифференциальное уравнение (6.3) и получаем

$$-A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi) + \omega_0^2 A \sin(\omega t + \varphi) = 0. \quad (6.5)$$

Чтобы это равенство выполнялось в любой момент времени  $t$ , должно выполняться условие

$$-\omega^2 + \omega_0^2 = 0 \quad \text{или} \quad \omega = \pm \omega_0. \quad (6.6)$$

Считая частоту положительной величиной, записываем общее решение уравнения (6.3) в виде

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi), \quad (6.7)$$

где амплитуда  $A$  и начальная фаза  $\varphi$  — постоянные величины. Эта запись исчерпывает все решения дифференциального уравнения, так как позволяет удовлетворить любым начальным условиям. Отметим, что амплитуда и начальная фаза зависят от начальных условий (от того, как колебательная система была выведена из положения равновесия).

Таким образом, консервативный гармонический осциллятор может совершать чисто гармонические колебания с частотой, равной его собственной частоте, с амплитудой любой величины и с произвольной начальной фазой. При этом частота колебаний (собственная частота) зависит только от свойств самой колебательной системы, но не зависит от начальных условий (а значит, и от амплитуды).

### 6.3. Свободные колебания гармонического осциллятора с затуханием

Рассматривая осциллятор с затуханием, возьмем за основу модель консервативного осциллятора, в которую добавим силу вязкого трения. Сила вязкого трения направлена против скорости движения осциллятора в среде (в жидкости или газе) и прямо пропорциональна этой скорости ( $F = -\alpha v$ ). Тогда результирующая сила, действующая на груз, записывается так:

$$F = -kx - \alpha v. \quad (6.8)$$

Используя второй закон Ньютона, получаем дифференциальное уравнение, описывающее затухающий осциллятор:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (6.9)$$

где  $\beta$  — постоянная затухания:  $\beta = \frac{\alpha}{2m}$ . Она тоже имеет размерность частоты.

Решение уравнения (6.9) распадается на три случая:

1. При малом трении ( $\beta < \omega_0$ ) общее решение записывается в виде

$$x(t) = Ae^{-\beta t} \sin(\omega_D t + \varphi), \quad (6.10)$$

где  $\omega_D = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$  — частота свободных затухающих колебаний.

На рис. 6.1 приведен график зависимости затухающих «синусоидальных» свободных колебаний при малом трении. Колебания

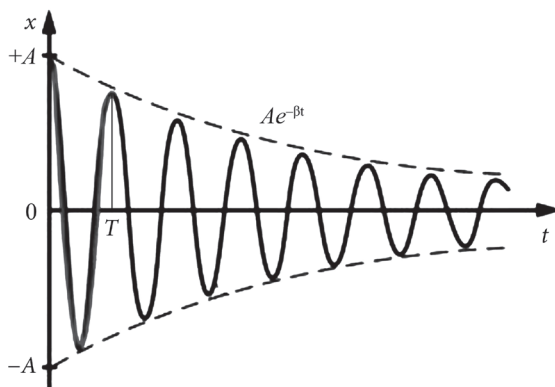


Рис. 6.1. График зависимости затухающих свободных колебаний при малом трении

с течением времени ослабевают, и огибающая графика колебаний не выходит за пределы кривых  $\pm A e^{-\beta t}$ . Это так называемый *затухающий осцилляторный процесс*.

2. Затухание в случае  $\beta = \omega_0$  называют *критическим режимом*. Начиная с такого значения показателя затухания осциллятор будет совершать так называемое неколебательное движение. В критическом режиме движение происходит по закону

$$x(t) = (A + Bt)e^{-\beta t}. \quad (6.11)$$

3. При сильном трении ( $\beta > \omega_0$ ) решение выглядит следующим образом:

$$x(t) = A e^{-\gamma_1 t} + B e^{-\gamma_2 t}, \quad (6.12)$$

где  $\gamma_{1,2} = \beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$ . Такой процесс называют *апериодическим*.

## 6.4. Вынужденные колебания гармонического осциллятора и явление резонанса

Колебания осциллятора называют *вынужденными*, когда на него производится дополнительное воздействие внешней периодической силой.

Наиболее важный пример вынужденных колебаний — колебание осциллятора под действием гармонической вынуждающей силы:

$$F = F_0 \cos \Omega t, \quad (6.13)$$

где  $F_0$  — амплитуда внешней силы;  $\Omega$  — ее частота.

Для начала рассмотрим консервативный гармонический осциллятор (когда нет силы трения). Второй закон Ньютона для него запишется в виде

$$ma = -kx + F_0 \cos \Omega t. \quad (6.14)$$

Введем обозначения:  $\omega_0^2 = k/m$ ,  $\Phi_0 = F_0/m$ . Заменяя ускорение на вторую производную от координаты по времени, получим следующее неоднородное дифференциальное уравнение (с отличной от нуля правой частью):

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \Phi_0 \cos \Omega t. \quad (6.15)$$

Решением этого уравнения будет сумма общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения. Общее решение однородного уравнения уже было получено ранее (6.7).

Найдем частное решение. Частное решение ищется в виде правой части уравнения (6.15). Тогда подставим в уравнение (6.15) решение вида  $x(t) = B \cos \Omega t$  и получим значение для константы

$$B = \frac{\Phi_0}{\omega_0^2 - \Omega^2}. \text{ Значит, окончательное решение запишется в виде}$$

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi) + \frac{\Phi_0}{\omega_0^2 - \Omega^2} \cos \Omega t. \quad (6.16)$$

Теперь рассмотрим реальную ситуацию вынужденных колебаний при наличии силы вязкого трения. Второй закон Ньютона для вынужденных гармонических колебаний осциллятора с затуханием будет иметь вид

$$ma = -kx - \alpha v + F_0 \cos \Omega t, \quad (6.17)$$

а дифференциальное уравнение движения в этом случае

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = \Phi_0 \cos \Omega t, \quad (6.18)$$

$$\text{где } \beta = \frac{\alpha}{2m}, \omega_0^2 = \frac{k}{m}, \Phi_0 = \frac{F_0}{m}.$$

Его решение также будет строиться как сумма решений однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения. Решение однородного уравнения было проведено в параграфе 6.2.

Если мы рассмотрим устоявшийся процесс, т. е. ситуацию при  $t \rightarrow \infty$ , то решение однородного уравнения будет стремиться к нулю и останется только частное решение.

Частное решение данного уравнения также ищем в виде правой части (6.18):

$$x(t) = B \cos(\Omega t + \varphi). \quad (6.19)$$

Требуется определить величину амплитуды  $B$  вынужденных колебаний и их начальную фазу  $\varphi$ . Подставим решение (6.19) в уравнение (6.18), предварительно продифференцировав (6.19), тогда получим

$$B \left( (\omega_0^2 - \Omega^2) \cos(\Omega t + \varphi) - 2\Omega\beta \sin(\Omega t + \varphi) \right) = \Phi_0 \cos \Omega t.$$

Преобразуем это выражение по тригонометрическим формулам:

$$\begin{aligned} & \left( B \left( (\omega_0^2 - \Omega^2) \cos \varphi - 2\Omega\beta \sin \varphi \right) - \Phi_0 \right) \cos \Omega t + \\ & + B \left( -(\omega_0^2 - \Omega^2) \sin \varphi - 2\Omega\beta \cos \varphi \right) \sin \Omega t = 0. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Выражение (6.20) представляет собой сумму двух гармонических членов:

$$a \cos \Omega t + b \sin \Omega t = 0, \quad (6.21)$$

где  $a$  и  $b$  — постоянные во времени величины. Очевидно, что последнее равенство может удовлетворяться при любом  $t$  только в том случае, когда обе величины  $a$  и  $b$  равны нулю. Поэтому из (6.20) следует

$$\begin{aligned} & B \left( (\omega_0^2 - \Omega^2) \cos \varphi - 2\Omega\beta \sin \varphi \right) - \Phi_0 = 0, \\ & (\omega_0^2 - \Omega^2) \sin \varphi + 2\Omega\beta \cos \varphi = 0. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Из этих двух уравнений определим  $B$  и  $\varphi$  (для краткости опустив некоторые математические выкладки):

$$B = \frac{\Phi_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}}, \quad \varphi = -\arctg \frac{2\beta \Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}. \quad (6.23)$$

Таким образом, вынужденные колебания происходят всегда с той же частотой  $\Omega$ , с которой изменяется внешняя сила. Амплитуда вынужденных колебаний зависит не только (и не столько) от величины внешней силы, но и от ее частоты.

Амплитуда вынужденных колебаний очень резко возрастает, если частота внешней силы близка к частоте собственных колебаний. Явление резкого нарастания амплитуды колебаний в тех случаях, когда частота внешней силы приближается к собственной частоте, называется *резонансом*.



## 6.5. Торсионный маятник

*Торсионный пружинный осциллятор* (торсионный маятник; от фр. *torsion* — скручивание, кручение) представляет собой уравновешенный ротор (маховик) со спиральной пружиной, закручивающейся при повороте маховика. Подобное устройство используется в механических карманных или наручных часах (балансовый механизм). Торсионный маятник является механическим примером гармонического осциллятора.

При повороте маховика из положения равновесия на угол  $\varphi$  прикрепленная к нему спиральная пружина (другой конец которой закреплен неподвижно) создает возвращающий момент  $N$ , пропорциональный углу отклонения:

$$N = -D\varphi. \quad (6.24)$$

Коэффициент пропорциональности  $D$  называется жесткостью пружины. Угол отклонения маховика из положения равновесия измеряется по неподвижной шкале при помощи стрелки, прикрепленной к маховику. В положении равновесия стрелка указывает на нулевое деление шкалы. Применяя к движению маховика с моментом инерции  $J$  основное уравнение динамики вращения твердого тела вокруг неподвижной оси, получаем следующее дифференциальное уравнение собственных колебаний торсионного пружинного осциллятора:

$$J\ddot{\varphi} = -D\varphi \quad \text{или} \quad \ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0, \quad (6.25)$$

где введено обозначение  $\omega_0^2 = D/J$ .

Общее решение уравнения (6.25) представляет собой простое гармоническое колебание (см. параграф 6.2):

$$\varphi(t) = A_0 \sin(\omega_0 t + \delta_0). \quad (6.26)$$

Амплитуда  $A_0$  и начальная фаза  $\delta_0$  в (6.26) зависят от начальных условий, т. е. от угла отклонения  $\varphi(0)$  и угловой скорости  $\dot{\varphi}(0)$  при

$t = 0$ . Другими словами, эти характеристики колебательного движения зависят от способа возбуждения колебаний.

Колебания происходят с угловой частотой  $\omega_0$ , квадрат которой пропорционален жесткости пружины  $D$  и обратно пропорционален моменту инерции  $J$  маховика. Частота  $\omega_0$  и соответствующий ей период  $T_0 = 2\pi/\omega_0$ , в отличие от амплитуды и начальной фазы, не зависят от начальных условий: они целиком определяются свойствами самого осциллятора, т. е. значениями параметров осциллятора  $D$  и  $J$ . Собственные колебания линейного осциллятора всегда происходят с одной и той же собственной частотой  $\omega_0$  независимо от способа возбуждения.

При наличии силы вязкого трения в дифференциальном уравнении будет присутствовать тормозящий момент этой силы, пропорциональный угловой скорости ротора:

$$\ddot{\varphi} + 2\beta\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0, \quad (6.27)$$

где постоянная затухания  $\beta$  характеризует интенсивность вязкого трения в системе. Постоянная затухания  $\beta$ , как и  $\omega_0$ , имеет размерность частоты.

Если трение настолько слабо, что  $\beta < \omega_0$ , общее решение уравнения (6.27) имеет колебательный характер и может быть представлено в следующем виде (см. параграф 6.3.):

$$\varphi(t) = A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega_D t + \delta_0). \quad (6.28)$$

Это решение описывает затухающие колебания, медленно меняющаяся амплитуда  $A_0 e^{-\beta t}$  которых экспоненциально убывает со временем. Начальное значение амплитуды  $A_0$  и начальная фаза  $\delta_0$  определяются из начальных условий. Частота  $\omega_D$  периодического (синусоидального) сомножителя в (6.28) дается следующим выражением:

$$\omega_D = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \omega_0 \sqrt{1 - (\beta/\omega_0)^2}. \quad (6.29)$$

## 6.6. Добротность, время релаксации, декремент затухания

В случае колебательного движения затухание характеризуют такими параметрами:

1. *Добротность*, которую обычно обозначают буквой  $Q$ . По определению добротность равна

$$Q = \frac{\omega_0}{2\beta}. \quad (6.30)$$

Чем больше добротность, тем медленнее затухают колебания осциллятора. Таким образом, добротность характеризует «качество» колебательной системы. В случае малого трения ( $\beta < \omega_0$ ) добротность пропорциональна отношению запасенной энергии  $E(t)$  в осцилляторе к энергии  $\Delta E_{T_D}$ , теряемой за период колебаний:

$$Q = 2\pi \frac{E(t)}{\Delta E_{T_D}}.$$

Критическое затухание  $\beta = \omega_0$  примечательно тем, что именно при таком затухании осциллятор быстрее всего оказывается в положении равновесия. Если трение меньше критического, он дойдет до положения равновесия быстрее, однако «проскочит» его по инерции и будет совершать колебания. Если трение больше критического, то осциллятор будет экспоненциально стремиться к положению равновесия, но тем медленнее, чем больше трение.

У осциллятора с критическим затуханием добротность равна 0,5. Соответственно добротность указывает характер поведения осциллятора. Значение  $Q \leq 0,5$  соответствует неколебательному движению осциллятора, в свободном движении он пересечет положение равновесия не более одного раза. Если  $Q > 0,5$ , то свободное движение осциллятора представляет собой колебания; теоретически со временем он пересечет положение равновесия неограниченное

количество раз. Примеры «добротных» колебательных систем: камертон ( $Q \sim 10^4$ ), кварцевый крутильный маятник ( $Q \sim 10^7-10^8$ ).

Также добротность примерно равна количеству колебательных циклов  $N$ , за которое амплитуда колебаний уменьшается в  $e$  раз, умноженное на  $\pi$ :  $Q \approx \pi N$ .

Следует отметить, что добротность не только характеризует затухание колебаний, но и является важной величиной, определяющей параметры вынужденных колебаний. Добротность иногда называют коэффициентом усиления осциллятора, так как при некоторых способах возбуждения при совпадении частоты возбуждения с резонансной частотой колебаний их амплитуда устанавливается примерно в  $Q$  раз больше, чем при возбуждении с той же интенсивностью на низкой частоте.

2. *Время жизни колебаний* (время затухания, время релаксации)  $\tau$  — время, за которое амплитуда колебаний уменьшится в  $e \approx 2.72$  раза:

$$\tau = \frac{1}{\beta}. \quad (6.31)$$

Хотя формально колебания продолжаются бесконечно долго, характерное время  $\tau$  условно можно рассматривать как длительность процесса затухания колебаний: за конечное число таких интервалов амплитуда становится меньше любого сколь угодно малого значения. При малом трении, когда  $\beta \ll \omega_0$  (условие слабого затухания), осциллятор совершает большое число  $N$  циклов собственных колебаний в течение времени жизни  $\tau$ :  $N = \tau/T_0 \gg 1$ .

3. *Декремент затухания*  $D$  — безразмерная величина, которая определяется отношением двух последовательных максимальных отклонений в одну сторону:

$$D = \frac{x_{\max n}}{x_{\max n+1}} = e^{\beta T}. \quad (6.32)$$

4. *Логарифмический декремент затухания* — безразмерная величина, которая используется для характеристики быстроты затухания колебаний и определяется как логарифм отношения двух последовательных максимальных отклонений в одну сторону:

$$\lambda = \ln \left( \frac{x_{\max n}}{x_{\max n+1}} \right) = \beta T = \frac{T}{\tau}. \quad (6.33)$$

Обратная логарифмическому декременту величина  $1/\lambda = \tau/T$  — это число циклов колебаний, совершаемых осциллятором за время затухания  $\tau$ .

## Лабораторная работа 20

### Изучение свободных и вынужденных колебаний торсионного маятника

Цель работы:

- исследовать свободные, затухающие и вынужденные колебания торсионного маятника;
- измерить собственную частоту и коэффициент затухания торсионного маятника;
- исследовать зависимость частоты затухающих колебаний от логарифмического декремента затухания.

#### Краткая теория

При небольших моментах сил трения колебания торсионного маятника описываются уравнением

$$\varphi(t) = \varphi_0 \sin(\omega_D t) e^{-\beta t}, \quad (6.34)$$

где  $\varphi_0$  — начальная амплитуда колебаний;  $\omega_D = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$  — циклическая частота затухающих колебаний;  $\omega_0$  — собственная циклическая частота маятника;  $\beta$  — коэффициент затухания. В отсутствие сил трения ( $\beta = 0$ ) колебания называются свободными.

Коэффициент затухания  $\beta$  можно определить, зная декремент затухания  $D$ , который определяется отношением амплитуд:

$$D = \frac{\varphi(t)}{\varphi(t + T_D)} = e^{\beta T_D}, \quad (6.35)$$

отличающихся на период колебаний  $T_D = 2\pi/\omega_D$ .

Логарифмируя выражение (6.35), получим логарифмический декремент затухания:

$$\lambda = \ln D = \beta T_D = \frac{1}{N_e}, \quad (6.36)$$

где  $N_e$  — число колебаний, за которое угловая амплитуда убывает в  $e$  раз. Если через  $N$  колебаний угловая амплитуда уменьшается в  $k$  раз, то коэффициент затухания  $\beta$  можно определить из формулы

$$\beta = \frac{\ln k}{NT_D}. \quad (6.37)$$

Таким образом, измерив  $T_D$  и определив число  $N$ , когда угловая амплитуда уменьшилась в  $k$  раз, по формуле (6.37) можно вычислить  $\beta$ , а используя связь

$$\omega_D = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}, \quad (6.38)$$

определить собственную частоту  $\omega_0$ .

### Методика эксперимента

Схема экспериментальной установки для изучения движения торсионного маятника приведена на рис. 6.2. Экспериментальная установка состоит из торсионного маятника с электромагнитом в виде катушки и мотора, создающего вынуждающую осциллирующую силу; источника постоянного тока электромагнитной катушки торсионного маятника; источника постоянного тока мотора маятника и секундомера.

Торсионный маятник может использоваться для изучения свободных и вынужденных вращательных гармонических колебаний. Электромагнитная катушка с током тормозит (демпфирует) эти колебания. Тормозное воздействие будет тем больше, чем больший ток течет по катушке. Кроме того, торсионный маятник может возбуждаться осциллирующей силой посредством эксцентрической тяги, управляемой мотором. Число оборотов эксцентрической тяги мотора может меняться двумя ручками — грубой и точной настройки источника постоянного тока мотора маятника.

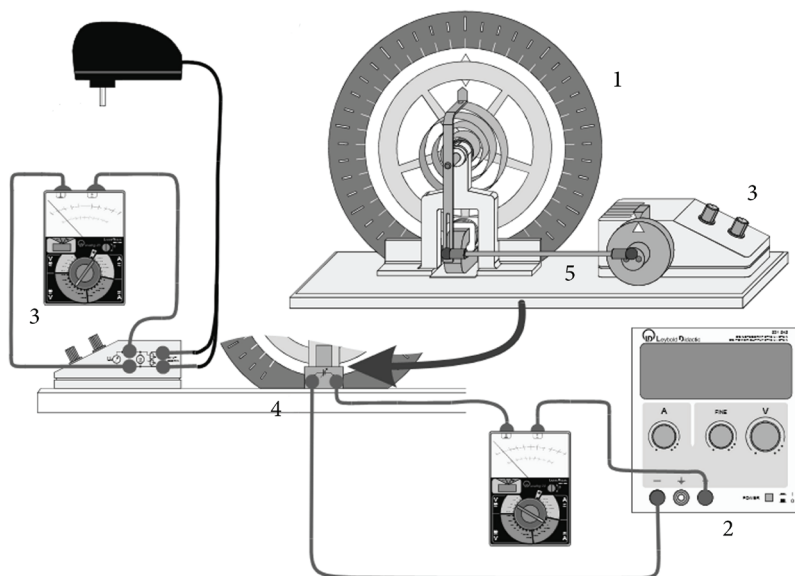


Рис. 6.2. Установка для изучения движения торсионного маятника: 1 — торсионный маятник; 2 — источник постоянного тока катушки торсионного маятника; 3 — источник постоянного тока мотора маятника; 4 — электромагнитная катушка; 5 — эксцентрическая тяга

### Порядок выполнения работы и условия эксперимента

1. Включите источник постоянного тока 2 в сеть переменного тока 220 В. Дайте прибору прогреться 2–3 мин.

2. Ручку А на источнике тока 2 установите в крайнее правое положение.

3. Вращая ручку V на источнике тока 2, установите ток, подаваемый на электромагнит демпфирующей катушки 0,2 А.

4. В тетради создайте таблицу для записи данных эксперимента и результатов проведенных расчетов (табл. 6.1).

При проведении экспериментов заполняются первые четыре столбца, остальные — при проведении статистической обработки.



Таблица 6.1

Изучение свободных и вынужденных колебаний торсионного маятника

$I, A$	$\varphi_0$	$\varphi_{10}$	$t_{10}, c$	$\beta, c^{-1}$	$\omega_D, c^{-1}$	$\Delta\varphi_0$	$\Delta\varphi_{10}$	$\Delta t_{10}, c$	$\Delta\beta, c^{-1}$	$\Delta\omega_D, c^{-1}$
$I_1$										
	$\bar{\varphi}_0$	$\bar{\varphi}_{10}$	$\bar{t}_{10}$							
$I_2$										
	$\bar{\varphi}_0$	$\bar{\varphi}_{10}$	$\bar{t}_{10}$							

5. Отклоните белый указатель на маятнике на некоторый угол. Запишите угловую амплитуду  $\varphi_0$ . Отпустите указатель и измерьте время десяти полных колебаний  $t_{10}$ . В конце десятого колебания измерьте угловую амплитуду  $\varphi_{10}$ .

6. Повторите п. 5 не менее 5 раз, не изменяя значения тока в демпфирующей катушке, данные занесите в таблицу.

7. Увеличивая ток в демпфирующей катушке не менее 5 раз, для каждого его значения повторите пп. 5–6.

**Внимание!** Величина тока в демпфирующей катушке не должна превышать 2 А.

### Обработка результатов измерения

1. Для каждого значения тока в демпфирующей катушке считайте средние значения  $\varphi_0$ ,  $\varphi_{10}$  и  $t_{10}$ .

2. Рассчитайте систематическую, случайную и полную погрешности определения  $\varphi_0$ ,  $\varphi_{10}$  и  $t_{10}$ .

3. Для каждого значения тока в демпфирующей катушке рассчитайте частоты затухающих колебаний  $\omega_D$  по формуле

$$\omega_D = \frac{20\pi}{t_{10}}.$$

4. Для каждого значения тока в демпфирующей катушке вычислите величину погрешности частоты затухающих колебаний по формуле

$$\Delta\omega_D = \frac{\Delta t_{10} \omega_D}{t_{10}},$$

где  $\Delta t_{10}$  — полная погрешность  $t_{10}$ .

5. Для каждого значения тока в демпфирующей катушке рассчитайте коэффициенты затухания  $\beta$  по формуле

$$\beta = \frac{\ln \varphi_0 / \varphi_{10}}{t_{10}}.$$

6. Для каждого значения тока в демпфирующей катушке вычислите величину погрешности частоты затухающих колебаний по формуле

$$\Delta\beta = \frac{1}{t_{10}} \sqrt{\left(\frac{\Delta\varphi_0}{\varphi_0}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\varphi_{10}}{\varphi_{10}}\right)^2 + \left(\frac{\ln \varphi_0 / \varphi_{10}}{t_{10}} \Delta t_{10}\right)^2},$$

где  $\Delta\varphi_0$  — полная погрешность для  $\varphi_0$ ;  $\Delta\varphi_{10}$  — полная погрешность для  $\varphi_{10}$ .

7. Постройте график зависимости  $\omega_D^2(\beta^2)$ . Экстраполируя его к  $\beta = 0$  (см. (6.38)), найдите  $\omega_0$ .

8. Используя метод наименьших квадратов, вычислите «наилучшее» значение  $\omega_0$  и погрешность ее определения  $\Delta\omega_0$  (подробно метод наименьших квадратов изложен в лабораторной работе 12) по формулам для  $\omega_0^2$ :

$$\omega_0^2 = \frac{\sum_{i=1}^p \omega_{Di}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i^2}{p},$$

$$\Delta\omega_0^2 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^p (\omega_{Di}^2 + \beta_i^2 - \omega_0^2)^2 \sum_{i=1}^p (\beta_i^2)^2}{p(p-2)}} t_{\frac{1+P}{2}, p-2},$$

где  $p$  — число точек;  $t_{\frac{1+P}{2}, p-2}$  — коэффициент Стьюдента, который

выбирается по таблице для эффективной вероятности  $(1 + P)/2$  и для числа точек на два меньшего, чем количество экспериментальных точек.

### Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определение гармонического осциллятора и осциллятора с затуханием.
2. Дайте определение амплитуды, частоты, фазы, начальной фазы, периода колебаний.
3. Дайте определение декремента затухания и логарифмического декремента затухания.
4. Запишите динамическое и кинематическое уравнение гармонического осциллятора и осциллятора с затуханием.
5. Каковы границы использования моделей гармонического осциллятора и осциллятора с затуханием?
6. Запишите уравнение движения твердого тела под действием момента силы упругости и сведите его к уравнению осциллятора с затуханием.
7. Решите уравнения гармонического осциллятора и осциллятора с затуханием.

## Лабораторная работа 21

### Изучение явления резонанса торсионного маятника

Цель работы:

- исследовать явления резонанса торсионного маятника;
- определить собственную частоту, коэффициент затухания и добротность торсионного маятника по резонансной кривой.

#### Краткая теория

Вынужденные колебания торсионного маятника возбуждаются моментом внешней силы с частотой  $\omega$  и угловой амплитудой  $\alpha_0$ . Через интервал времени порядка  $1/\beta$  маятник будет качаться на частоте  $\omega$  с постоянной амплитудой, определяемой соотношением (см. параграф 6.4):

$$\varphi_0 = \frac{\alpha_0}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}, \quad (6.39)$$

где  $\omega_0$  — собственная циклическая частота маятника;  $\beta$  — коэффициент затухания.

Зависимость (6.39) описывает явление резонансного возбуждения торсионного маятника. Если отобразить ее в координатах  $W = (\varphi/\varphi_{\max})^2$  и  $\omega$ , при выполнении условия  $\beta < \omega_0$  получим следующее соотношение:

$$W = \left( \frac{\varphi}{\varphi_{\max}} \right)^2 = \frac{\beta^2}{(\omega_0 - \omega)^2 + \beta^2}. \quad (6.40)$$

График этой зависимости изображен на рис. 6.3. Очевидно, что *положение максимума резонансной кривой определяет величину  $\omega_0$* . Проведем на графике прямую, параллельную оси абсцисс, при ординате  $1/2$ . Эта прямая пересечет резонансную кривую в точках  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Величину  $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$  называют шириной резонансной ли-

нии. Из (6.40) очевидно, что  $\Delta\omega = 2\beta$ . Таким образом, коэффициент затухания определяет полуширину резонансной линии.

### Методика эксперимента

Схема (см. рис. 6.2) и описание экспериментальной установки для изучения движения торсионного маятника приведены в описании лабораторной работы 20.

### Порядок выполнения работы и условия эксперимента

1. Включите источник постоянного тока 2 (рис. 6.2) в сеть переменного тока 220 В. Дайте прибору прогреться 2–3 мин.
2. Ручку  $A$  на источнике тока установите в крайнее правое положение.
3. Вращая ручку  $V$  на источнике тока, установите ток, подаваемый на электромагнит демпфирующей катушки, 0,4 А.

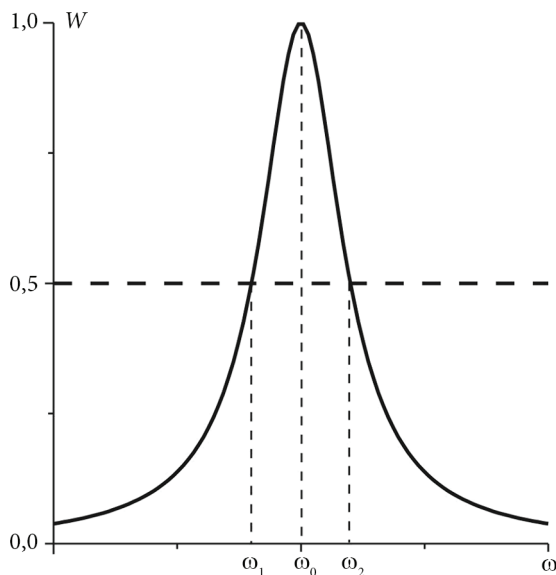


Рис. 6.3. График зависимости  $W = (\varphi/\varphi_{\max})^2$  от  $\omega$  при условии  $\beta < \omega_0$

4. Установите ручку грубой настройки 3 (рис. 6.2) в положение 10.
5. В тетради создайте таблицу для записи данных эксперимента и результатов проведенных расчетов (табл. 6.2).

Таблица 6.2

Изучение явления резонанса торсионного маятника

$I, A$	$N$	$t_N, c$	$\Delta\varphi_0$	$(\Delta\varphi_0)^2$	$\omega_D, c^{-1}$
$I_1$					
$I_2$					

При проведении экспериментов заполняются первые четыре столбца, остальные — при проведении статистической обработки.

6. Измерьте секундомером время  $t_N N$  полных оборотов эксцентрической тяги мотора (белый треугольник на 5 проходит указатель  $N$  один раз, рис. 6.2). Количество оборотов подбирайте так, чтобы  $t_N$  было не менее 10 с. Занесите данные в таблицу.

7. Для этой частоты вынуждающей силы определите размах колебаний  $\Delta\varphi_0$  (угол между крайними правым и левым положениями указателя на маятнике).

8. Повторите пп. 6–7 не менее 15 раз, изменяя число оборотов эксцентрической тяги мотора, т. е. вращая ручки грубой и тонкой настройки 3.

9. Повторите пп. 6–8 еще не менее чем для двух значений тока в демпфирующей катушке, не превышая 2 А.

### Обработка результатов измерения

1. Проведите вычисления  $(\Delta\varphi_0)^2$  и  $\omega_D$ , по формуле  $\omega_D = \frac{2\pi N}{t_N}$  и заполните соответствующие столбцы в таблице.

2. Для каждого значения тока в демпфирующей катушке на одном координатном поле постройте графики зависимостей  $(\Delta\varphi_0)^2$  от  $\omega_D$ .

3. Для каждого значения тока в демпфирующей катушке соедините точки гладкими кривыми и определите значения  $(\Delta\varphi_{0\max})^2$  в их максимумах.

4. Для каждого значения тока в демпфирующей катушке на одном координатном поле постройте графики зависимостей  $(\Delta\varphi_0/\Delta\varphi_{0\max})^2$  от  $\omega_D$ .

5. Для каждого значения тока в демпфирующей катушке по графикам найдите величины  $\omega_0$  и  $\beta$ .

6. Для каждого значения тока в демпфирующей катушке рассчитайте погрешность определения  $\omega_0$ . За погрешность определения частоты  $\Delta\omega_0$  следует принять половину интервала между двумя точками, ближайшими к резонансной частоте.

7. Для каждого значения тока в демпфирующей катушке рассчитайте погрешность определения  $\beta$  по формуле  $\Delta\beta = \Delta\omega/\sqrt{2}$ , где  $\Delta\omega$  — половина интервала между двумя точками на полувывоте графика.

8. Для каждого значения тока в демпфирующей катушке рассчитайте добротность по формуле (6.30).

9. Для каждого значения тока в демпфирующей катушке вычислите погрешность добротности по формуле

$$\frac{\Delta Q}{Q} = \sqrt{\left(\frac{\Delta\omega_0}{\omega_0}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\beta}{\beta}\right)^2}.$$

### Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определение гармонического осциллятора и осциллятора с затуханием.

2. Дайте определение амплитуды, частоты, фазы, начальной фазы, периода колебаний.

3. Дайте определение декремента затухания и логарифмического декремента затухания.

4. Дайте определение добротности. Что она характеризует?

5. Запишите динамическое и кинематическое уравнение вынужденных колебаний.

6. Каковы границы использования моделей гармонического осциллятора и осциллятора с затуханием?

7. Дайте определение и опишите физическую суть явления резонанса.



## Пример оформления результатов измерений и их статистической обработки

В данном разделе приведем пример обработки результатов измерений диаметра стального шарика с помощью микрометра с ценой деления барабана 0,01 мм.

При пользовании микрометром, согласно его паспорту, необходимо проверить нулевую отметку. При измерении микрометром обязательно пользоваться трещоткой, вращая ее плавно, без рывков.

1. Измеряем нуль микрометра  $d_0$ .

Запишем результаты измерений в таблицу:

№ п/п	$d_{0p}$ , мм
1	0,17
2	0,17
3	0,17

1.1. Вычисляем среднее арифметическое значение  $\bar{d}_0$ :

$$\bar{d}_0 = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 d_{0i} = \frac{1}{3} (0,17 + 0,17 + 0,17) = 0,170 \text{ мм.}$$

*Примечание.* Результат очевиден, так как мы получили три одинаковых значения. Однако мы пишем  $\bar{d}_0 = 0,170$  мм — на один знак больше, потому что, во-первых, среднее всегда точнее, так как случайные погрешности частично компенсируются; во-вторых, расчеты рекомендуется вести на порядок точнее, чем окончательный результат, чтобы погрешность округления не внесла заметный вклад.

1.2. Вычисляем случайную погрешность  $\overset{\circ}{\Delta}(d_0)$  по формуле

$$\overset{\circ}{\Delta} = t_{3,P=0,95} \cdot S_{\bar{x}} = t_{3,P=0,95} \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N(N-1)}},$$

$$\begin{aligned}\overset{\circ}{\Delta}(d_0) &= 4,30 \cdot S_x = \\ &= 4,30 \cdot \sqrt{\frac{(0,17 - 0,170)^2 + (0,17 - 0,170)^2 + (0,17 - 0,170)^2}{3(3-1)}} = \\ &= 0,00 \text{ мм.}\end{aligned}$$

1.3. Записываем систематическую погрешность  $\Delta_c(d_0)$ , равную цене деления барабана микрометра:  $\Delta_c(d_0) = 0,01 \text{ мм}$ .

1.4. Рассчитываем полную погрешность ( $\Delta d_0$ ) следующим образом:  $\Delta d_0 = \sqrt{(\Delta_c(d_0))^2 + (\overset{\circ}{\Delta}(d_0))^2} = \sqrt{(0,01)^2 + (0,00)^2} = 0,01 \text{ мм}$ .

1.5. Записываем результат по форме  $d_0 = (0,170 \pm 0,010) \text{ мм}$ ,  $P = 0,95$ .

2. Проводим измерение диаметра стального шарика  $d_k$ .

При измерении диаметра стремимся возможное различие в диаметре в зависимости от места измерения свести к случайной погрешности. Результаты измерения заносим в таблицу (первый и второй столбцы):

№ п/п	$d_{ki}$ , мм	$(d_{ki} - \bar{d}_k)$ , мм $\bar{d}_k = 4,922 \text{ мм}$	$(d_{ki} - \bar{d}_k)^2$ , мм <sup>2</sup>
1	4,92	-0,002	0,000004
2	4,90	-0,022	0,000484
3	4,92	-0,002	0,000004
4	4,92	-0,002	0,000004
5	4,95	+0,028	0,000784
	$\Sigma$	<b>0,000</b>	<b>0,001280</b>

2.1. Вычисляем среднее арифметическое значение  $\bar{d}_k$ :

$$\begin{aligned}\bar{d}_k &= \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 d_{ki} = \frac{1}{5} (4,92 + 4,90 + 4,92 + 4,92 + 4,95) = \frac{24,61}{5} = \\ &= 4,922 \text{ мм.}\end{aligned}$$

2.2. Определяем случайную погрешность  $\overset{\circ}{\Delta}(d_k)$ . Для удобства вычисления случайной погрешности в таблице добавляем два последних столбца: в третьем столбце таблицы построчно рассчитываются значения разности  $(d_{ki} - \bar{d}_k)$  с учетом знака, а во втором — квадрат значения, полученного в третьем столбце  $(d_{ki} - \bar{d}_k)^2$ . Найдем

сумму значений в третьем  $\left( \sum_{i=1}^N (d_{ki} - \bar{d}_k) \right)$  и четвертом  $\left( \sum_{i=1}^N (d_{ki} - \bar{d}_k)^2 \right)$

столбцах. Если значение суммы в третьем столбце равно нулю, значит, вычисления выполнены верно и можно приступать к расчету случайной погрешности.

$$\overset{\circ}{\Delta} = t_{5, P=0,95} \cdot S_{\bar{x}} = t_{5, P=0,95} \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (d_{ki} - \bar{d}_k)^2}{N(N-1)}},$$

$$\overset{\circ}{\Delta}(d_k) = 2,78 \cdot S_{\bar{x}} = 2,78 \cdot \sqrt{\frac{0,001280}{5(5-1)}} = 0,02224 \text{ мм.}$$

2.3. Записываем систематическую погрешность  $\Delta_C(d_k)$ , равную цене деления барабана микрометра:  $\Delta_C(d_k) = 0,01 \text{ мм}$ .

2.4. Рассчитываем полную погрешность ( $\Delta d_k$ ) следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta d_k &= \sqrt{(\Delta_C(d_k))^2 + (\overset{\circ}{\Delta}(d_k))^2} = \sqrt{(0,01)^2 + (0,02224)^2} = \\ &= 0,024385 \text{ мм.} \end{aligned}$$

2.5. Записываем результат по форме  $d_k = (4,922 \pm 0,024) \text{ мм}$ ,  $P = 0,95$ .

3. Вычисляем диаметр стального шарика  $d$  с учетом смещения нуля прибора (используем результаты, полученные в пп. 1 и 2).

$$d = \bar{d}_k - \bar{d}_0 = 4,922 - 0,170 = 4,752 \text{ мм},$$

$$\Delta d = \sqrt{(\Delta d_0)^2 + (\Delta d_k)^2} = \sqrt{(0,01)^2 + (0,024)^2} = 0,026356 \text{ мм} \approx \\ \approx 0,026 \text{ мм}.$$

Ответ:  $d = (4,752 \pm 0,026) \text{ мм}$ .

# СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

## Основная

ГОСТ Р 8.736–2011 ГСИ. Измерения прямые многократные. Методы обработки результатов наблюдений. Основные положения. — М. : Стандартинформ, 2013. — 19 с.

*Зайдель А. Н.* Ошибки измерений физических величин : метод. рекомендации / А. Н. Зайдель. — СПб. : Лань, 2005. — 112 с.

*Иродов И. Е.* Основные законы механики / И. Е. Иродов. — М. : Бином. Лаборатория знаний, 2009. — 248 с.

Краткие сведения по обработке результатов физических измерений : метод. указания / под ред. Г. П. Яковлева. — Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2003. — 52 с.

*Матвеев А. Н.* Механика и теория относительности / А. Н. Матвеев. — СПб. : Лань, 2009. — 432 с.

*Савельев И. В.* Курс общей физики : учеб. пособие : в 5 т. Т. 1 / И. В. Савельев. — СПб. : Лань, 2011. — 448 с.

*Сивухин Д. В.* Общий курс физики. Механика. Т. 1 / Д. В. Сивухин. — М. : Физматлит, 2006. — 520 с.

*Степанова Е. А.* Основы обработки результатов измерений : учеб. пособие / Е. А. Степанова, Н. А. Скулкина, А. С. Волегов. — Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2014. — 95 с.

*Стрелков С. П.* Механика / С. П. Стрелков. — СПб. : Лань, 2005. — 288 с.

Дополнительная

*Алешкевич В. А.* Механика / В. А. Алешкевич, Л. Г. Деденко, В. А. Караваев. — М. : Физматлит, 2011. — 469 с.

*Андронов А. А.* Теория колебаний / А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин. — М. : Наука, 1981. — 918 с.

*Иеверонова В. И.* Физический практикум. Механика и молекулярная физика / В. И. Иеверонова. — М. : Наука, 1967. — 353 с.

*Ишмухаметов Б. Х.* Механика / Б. Х. Ишмухаметов, М. И. Кацнельсон. — Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 1999. — 185 с.

*Киттель Ч.* Механика (Берклеевский курс физики) / Ч. Киттель, У. Найт, М. Рудерман. — СПб. : Лань, 2005. — 481 с.

*Хайкин С. Э.* Физические основы механики / С. Э. Хайкин. — СПб. : Лань, 2008. — 772 с.

*Учебное издание*

Скулкина Надежда Александровна  
Колчанова Светлана Геннадьевна  
Шихова Вера Анатольевна  
Вилисова Елена Анатольевна  
Черняк Владимир Григорьевич  
Студенок Сергей Игоревич  
Германенко Александр Викторович

# МЕХАНИКА

Практикум

Заведующий редакцией *М. А. Овечкина*  
Редактор *Т. А. Федорова*  
Корректор *Т. А. Федорова*  
Компьютерная верстка *В. К. Матвеев*

Подписано в печать 01.08.2019 г. Формат 60 × 84 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>.  
Бумага офсетная. Цифровая печать. Усл. печ. л. 16,04.  
Уч.-изд. л. 12,6. Тираж 40 экз. Заказ 153.

Издательство Уральского университета.  
Редакционно-издательский отдел ИПЦ УрФУ  
620083, Екатеринбург, ул. Тургенева, 4.  
Тел.: +7 (343) 389-94-79, 350-43-28  
E-mail: rio.marina.ovechkina@mail.ru

Отпечатано в Издательско-полиграфическом центре УрФУ  
620083, Екатеринбург, ул. Тургенева, 4.  
Тел.: +7 (343) 358-93-06, 350-58-20, 350-90-13  
Факс +7 (343) 358-93-06  
<http://print.urfu.ru>



Для заметок

---

Для заметок

---



